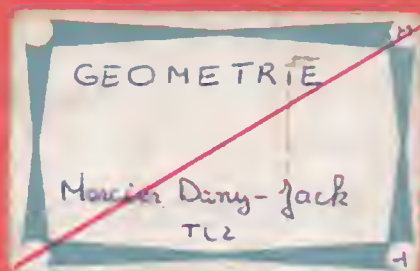




marque déposée



le Calligraphe

cahier _____

école _____

classe _____

nom _____



No 103

GEOMETRIE

LEÇONS n° 1

COURS DE TERMINALE C

DE MME J. MANOTTE

(recopié et présenté par D.-J. MERCIER)

1974 - 75

23.9

1

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Somme de \vec{E}' et \vec{E}'' , sous-espaces vectoriels de \vec{E} sur \mathbb{R} .

$$\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$$

$$\vec{S} = \left\{ \vec{u}, \vec{u} \in \vec{E} \mid \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''} \right\}$$

ou encore

$$\vec{S} = \left\{ \vec{u} \in \vec{E} \mid \exists \vec{u}' \in \vec{E}', \exists \vec{u}'' \in \vec{E}'' : \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \right\}$$

 \vec{S} est un sous-espace de \vec{E} .

$$\vec{0} \in \vec{S} \quad (\text{voir } \vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}''}) \quad \text{donc } \vec{S} \neq \emptyset$$

$$\star \text{ Soit } \vec{u} \in \vec{S} : \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \quad \vec{u}' \in \vec{E}', \vec{u}'' \in \vec{E}''$$

$$\vec{v} \in \vec{S} : \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad \vec{v}' \in \vec{E}', \vec{v}'' \in \vec{E}''$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{(\vec{u}' + \vec{v}')}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{(\vec{u}'' + \vec{v}'')}_{\in \vec{E}''}, \text{ car } + \text{ est interne dans } \vec{E}',$$

" " " " " "

$$\vec{u} + \vec{v} = \underbrace{\vec{w}_1}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{w}_2}_{\in \vec{E}''} \quad \vdash \quad \underline{\vec{u} + \vec{v} \in \vec{S}}$$

$$\star \forall \vec{u} \in \vec{S} : \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$

$$\underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{u} \in \vec{S}} ? \quad (\text{stabilité externe})$$

$$\text{opérateur.} \quad \lambda \vec{u} = \underbrace{\lambda \vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\lambda \vec{u}''}_{\in \vec{E}''}$$

$$\lambda \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''}$$

$$\underline{\lambda \vec{u} \in \vec{S}}$$

Remarque

Soit \vec{E}_i un sous-espace de \vec{E} contenant \vec{E}' et \vec{E}'' (donc $\vec{E}' \cup \vec{E}''$); alors $\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$ est contenu dans tout E_i .

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}'' \in \vec{E}_i ?$$

$$\text{Qui car } \vec{u}' \in \vec{E}' \subset \vec{E}_i$$

$$\vec{u}'' \in \vec{E}'' \subset \vec{E}_i$$

$$\vec{u}' \in \vec{E}_i$$

$$\vec{u}'' \in \vec{E}_i$$

$$\vec{u}' + \vec{u}'' \in \vec{E}_i \quad (+ \text{ interne dans } \vec{E}_i)$$

On dit que \vec{S} est "le plus petit" des sous-espaces de \vec{E} contenant $\vec{E}' \cup \vec{E}''$.

Somme directe

$$\text{Si et seulement si } \vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{ \vec{0} \}$$

\vec{S} est directe.

$$1^\circ \vec{S} = \{ \vec{u} \in \vec{E} / \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''} \}$$

$$2^\circ \vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{ \vec{0} \}$$

$$\text{On note } \vec{S} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$$

Propriété

* $\forall \vec{u} \in \vec{S}$ (directe), $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$ lorsque on l'a trouvée, est une décomposition de \vec{u} unique.

$$\text{En effet, si } \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''} = \underbrace{\vec{v}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{v}''}_{\in \vec{E}''},$$

$$\text{alors } \vec{u}' - \vec{v}' = \vec{v}'' - \vec{u}''$$

$$\underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{(-\vec{v}')}_{\in \vec{E}'} = \underbrace{\vec{v}''}_{\in \vec{E}''} + \underbrace{(-\vec{u}'')}_{\in \vec{E}''}$$

$$\vec{u}' = \vec{u}''$$

Les 2 vecteurs \vec{u}' et \vec{u}'' sont égaux ; c'est donc du même vecteur qu'il s'agit. Il appartient à \vec{E}' et à \vec{E}'' , c'est donc le vecteur nul. Donc
$$\begin{cases} \vec{u}' = \vec{v}' \\ \vec{u}'' = \vec{v}'' \end{cases}$$

$\exists ! \vec{u}' + \vec{u}''$, décomposition de \vec{u} .

* Réciproque :

Si $\vec{S} = \vec{E}' + \vec{E}''$, et si, de plus, $\forall \vec{u} \in \vec{S}$, $\exists !$

$\exists ! \vec{u} = \underbrace{\vec{u}'}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{u}''}_{\in \vec{E}''}$ (décomposition unique)

$$\text{Alors } \vec{S} = \vec{E}' \oplus \vec{E}''$$

En effet, si $\vec{u} \in \vec{E}' \cap \vec{E}''$, comme l'intersection de 2 sous-espaces est un sous-espace, alors $\vec{0}$ et $-\vec{u}$ ~~app~~
 $\in \vec{E}' \cap \vec{E}''$

$$\text{Alors } \vec{0} = \underbrace{\vec{u}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{(-\vec{u})}_{\in \vec{E}''}$$

Cette décomposition du vecteur nulle devant être unique et étant connue d'avance : $\vec{0} = \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}'} + \underbrace{\vec{0}}_{\in \vec{E}''}$,

on a nécessairement $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{E}' \cap \vec{E}'' = \{\vec{0}\}$

Deux espaces supplémentaires dans \vec{E}

$$\text{3 choses } \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}', \vec{E}'' \text{ 2 sous-espaces de } \vec{E} \\ \vec{E}' \oplus \vec{E}'' = \vec{E} \end{array} \right.$$

On dit : ou bien que \vec{E}' et \vec{E}'' sont supplémentaires dans \vec{E} , ou bien que \vec{E}' est un supplémentaire de \vec{E}'' dans \vec{E} .

Dimensions de \vec{E}' et \vec{E}'' supplémentaires dans \vec{E}

Si \vec{E} de dimension finie n .

Si \vec{E}' et \vec{E}'' sont propres, alors :

$$\exists \text{ base de } \vec{E}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_r\}$$

$$\exists \text{ " } \vec{E}'' = \{\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \dots, \vec{\eta}_q\} \quad (r + q = n)$$

$$\text{Soit la famille } \vec{F} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_q\}$$

* \vec{F} est génératrice de \vec{E} :

$$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$$

$$\vec{u}' \in \vec{E}' \mapsto \vec{u}' = \sum_{i=1}^r x_i \vec{e}_i$$

$$\vec{u}'' \in \vec{E}'' \quad \vec{u}'' = \sum_{i=1}^q y_i \cdot \vec{\eta}_i$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i \vec{\omega}_i, \quad \vec{\omega}_i \in \mathcal{F}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

* \mathcal{F} est une partie libre de \vec{E} :

$$\sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i \vec{\omega}_i = \vec{0} \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in [1, p+q] \cap \mathbb{N}?$$

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{z}_i + \sum_{i=1}^q y_i \vec{\eta}_i$$

Cette décomposition est unique :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{0} + \vec{0} \\ \sum_{i=1}^p x_i \vec{z}_i &= \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^q y_i \vec{\eta}_i = \vec{0} \end{aligned}$$

Tous les x_i sont nuls (voir base des \vec{z}_i), tous les y_i sont nuls (voir base des $\vec{\eta}_i$).

$$\forall i \in [1, p+q], \quad \underline{\lambda_i = 0}$$

\mathcal{F} est libre.

\mathcal{F} est une base de \vec{E} .

$\exists p+q$ vecteurs dans \mathcal{F} .

$$\dim \vec{E} = p+q \implies n = p+q$$

$$\dim \vec{E} = \dim E' + \dim E''$$

Généralités

f linéaire: \vec{E} = espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} .
 \vec{F} = " " "

$$f: \vec{E} \longrightarrow \vec{F}$$

α) f est un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(F, +)$:

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

β)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad f(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot f(\vec{u})$$

ce qui traduit un homomorphisme de (E, \cdot) vers (F, \cdot) .

On dit que f est un homomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

$$\text{En général: } (E, *) \xrightarrow{f} (F, \top)$$

$$\forall (a, b) \in E^2; \quad f(a * b) = f(a) \top f(b)$$

f est alors un homomorphisme de $(E, *)$ vers (F, \top) .

* Si $\vec{F} = \vec{E}$ et si l'opération interne est la même, alors f est dite "endomorphisme".

* Si $\vec{E} \neq \vec{F}$ et si f bijective, alors f est un "isomorphisme".

* Si $\vec{E} = \vec{F}$ et si $+$ interne est la même, et si f est bijective, l'endomorphisme bijectif est dit "automorphisme".

N_f ou $\text{Ker } f$ est le noyau de f l'ensemble de \vec{E} qui

$$N_f = \{ \vec{u} \in \vec{E}, f(\vec{u}) = \vec{0}_F \}$$

N_f est un sous-espace vectoriel de E

* $N_f \neq \emptyset$ car $\vec{0}_E \in N_f$.

* $\forall \vec{u} \in N_f, f(\vec{u}) = \vec{0}_F$

$\forall \vec{v} \in N_f, f(\vec{v}) = \vec{0}_F$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0}_F$$

$$\vec{u} + \vec{v} \in N_f$$

N_f est stable pour $+$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in N_f$

$$f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) = \lambda \vec{0}_F = \vec{0}_F$$

$$\lambda \vec{u} \in N_f$$

N_f est stable pour \cdot .

Image de \vec{E} par f .

$\text{Im } f = f(\vec{E})$ est l'image de \vec{E} par f

$$\mathcal{I}(\vec{E}) = \{ \vec{v}, \vec{v} \in \vec{F} / \boxed{\exists \vec{u}}, \vec{u} \in \vec{E} : \mathcal{I}(\vec{u}) = \vec{v} \}$$

$\mathcal{I}(\vec{E})$ est un sous-espace vectoriel de F .

$$\ast \mathcal{I}(\vec{E}) \neq \emptyset \text{ car } \vec{0}_F \in \mathcal{I}(\vec{E})$$

$$\mathcal{I}(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$$

$$\ast \forall (\vec{v}, \vec{v}') \in [\mathcal{I}(\vec{E})]^2$$

$$\vec{v} + \vec{v}' \in \mathcal{I}(\vec{E})?$$

$$\exists \vec{u} / \vec{u} \in \vec{E}, \mathcal{I}(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\exists \vec{u}' / \vec{u}' \in \vec{E}, \mathcal{I}(\vec{u}') = \vec{v}'$$

$$\vec{v} + \vec{v}' = \mathcal{I}(\vec{u}) + \mathcal{I}(\vec{u}') = \mathcal{I}(\vec{u} + \vec{u}')$$

$$\exists (\vec{u} + \vec{u}') \in \vec{E} / \mathcal{I}(\vec{u} + \vec{u}') = \vec{v} + \vec{v}'$$

$$\vec{v} + \vec{v}' \in \mathcal{I}(\vec{E}), \text{ lequel est donc stable pour } +.$$

$$\ast \vec{v} \in \mathcal{I}(\vec{E})$$

$$\lambda \vec{v} \in \mathcal{I}(\vec{E})?$$

$$\vec{v} \in \mathcal{I}(\vec{E}) \mapsto \exists \vec{u} \in \vec{E} / \mathcal{I}(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\text{Or, } \lambda \vec{v} = \lambda \mathcal{I}(\vec{u}) = \mathcal{I}(\underbrace{\lambda \vec{u}}_{\in \vec{E}})$$

$$\exists \lambda \vec{u} \in \vec{E} / \mathcal{I}(\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{v} \quad \text{soit } \lambda \vec{v} \in \mathcal{I}(\vec{E}).$$

Donc, $\mathcal{I}(\vec{E})$ est stable pour \cdot .

Comparaison de dimensions de N_f , $\mathcal{F}(E)$, \vec{E}

1° "Par une bijection, la dimension est conservée". Σ

* Par exemple : \vec{E} de dim 3.

$$\forall \vec{u} \in \vec{E}, \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$\mathcal{F} \text{ linéaire : } \underbrace{\mathcal{F}(\vec{u})}_{\in \mathcal{F}(\vec{E})} = x \underbrace{\mathcal{F}(\vec{i})}_{\vec{i}'} + y \underbrace{\mathcal{F}(\vec{j})}_{\vec{j}'} + z \underbrace{\mathcal{F}(\vec{k})}_{\vec{k}'}$$

$\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ est une partie génératrice de $\mathcal{F}(\vec{E})$; pas nécessairement une partie libre. Donc peut-être pas une base de $\mathcal{F}(\vec{E})$.

Une base de $\mathcal{F}(\vec{E})$ devra donc renfermer 3 (ou moins) éléments.

La dimension de $\mathcal{F}(E)$ est \leq à $\dim E$. $\dim \underbrace{\mathcal{F}(E)}_F \leq \dim E$

Si \mathcal{F} est bijective de E vers F , alors $\mathcal{F}(E) = F$, et $\exists \mathcal{F}^{-1}$ de F sur E . Donc $\dim E \leq \dim \underbrace{\mathcal{F}(E)}_F = \dim F$

Donc $\dim E = \dim F$

2° Soit \vec{E}' un sous-espace supplémentaire de N_f dans E .

$$\text{Donc } \dim \vec{E}' + \dim N_f = \dim \vec{E}$$

On va montrer que \mathcal{F}' , restriction de \mathcal{F} à E' , est

Surjective :

$$f' : \vec{E}' \longrightarrow f(\vec{E})$$

$$\vec{y} \longmapsto f'(\vec{y}) = f(\vec{y})$$

* f' est surjective :

$$\forall \vec{v} \in f(\vec{E}) , \exists \vec{u} \in \vec{E} / f(\vec{u}) = \vec{v}$$

$$\text{Or } \vec{u} = \vec{x} + \vec{y} \quad \vec{x} \in N_f \text{ et } \vec{y} \in \vec{E}'$$

$$\vec{v} = \underbrace{f(\vec{x})}_{\vec{0}} + f(\vec{y}) = f(\vec{y})$$

$$\vec{v} = f'(\vec{y}) \quad , \quad \exists \vec{y} \in \vec{E}' / \vec{v} = f'(\vec{y})$$

* f' est injective :

$$f(\vec{y}) = f(\vec{y}_1) \quad \vec{y} \in \vec{E}' , \vec{y}_1 \in \vec{E}'$$

$$f(\vec{y} - \vec{y}_1) = \vec{0}$$

$$\in N_f$$

De plus, $\vec{y} \in \vec{E}'$ et $\vec{y}_1 \in \vec{E}'$ donc $\vec{y} + (-\vec{y}_1) \in \vec{E}'$
(new-space).

$$\vec{y} - \vec{y}_1 \in \vec{E}' \cap N_f$$

$$\vec{y} - \vec{y}_1 = \vec{0} \quad \vdash \quad \underline{\vec{y} = \vec{y}_1}$$

$$\underline{f'(\vec{y}) = f'(\vec{y}_1) \quad \vdash \quad \vec{y} = \vec{y}_1}$$



$$\dim N_f + \dim f(\vec{E}) = \dim \vec{E}$$

16-10

Preliminaires.

$$(B, \circ) = (GL(E), \circ) \text{ groupe}$$

On appelle "transformation" de E une application bijective de E dans lui-même.

Soit $B = \text{ens. des transformations de } E$.

(B, \circ) = groupe.

$$* \forall f \in B, \forall g \in B, g \circ f \in B$$

$$\text{Remarque } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

* L'opération \circ est associative.

$$* \exists \text{Id}_E \in B / \forall f \in B, f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f$$

$$* \forall f \in B, \exists f^{-1} \in B / f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

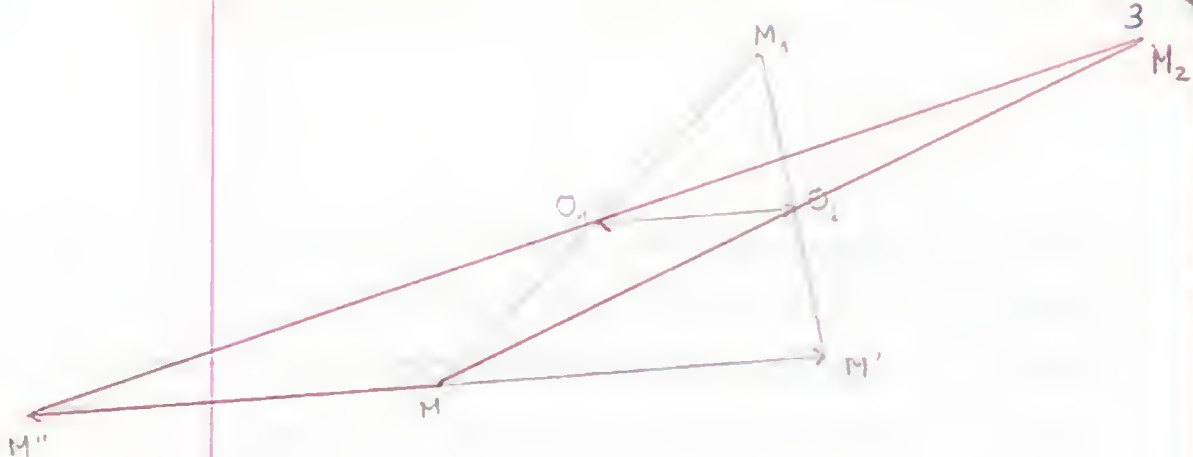
* L'opération \circ n'est pas commutative :

$$\text{non } (\forall (f, g) \in B^2, f \circ g = g \circ f)$$

$$\text{donc : } \exists (f, g) \in B^2 / f \circ g \neq g \circ f$$

$$\text{exemple : } \left. \begin{array}{l} S_2 \circ S_1 = T \\ S_1 \circ S_2 = T' \end{array} \right\} T \neq T'$$

$$T_{20, \vec{O}_2} \neq T'_{20, \vec{O}_2}$$



Caractérisation d'un sous-groupe de (B, \circ)

$$G \subset B$$

$$* G \neq \emptyset$$

$$* G \text{ stable pour } \circ.$$

$$* \forall f \in G ; \exists f^{-1} \in G / f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

Ces 3 conditions suffisent. En effet,

$$f \in G \text{ et } f^{-1} \in G, \circ \text{ étant interne dans } G,$$

$$\text{alors } f \circ f^{-1} = \underline{\text{Id}_E \in G}$$

Application involutive de E dans E

$$f \text{ involutive si et seulement si } f \circ f = \text{Id}_E$$

$$* f \text{ est aussi surjective.}$$

$$\forall y \in E \quad y = f \circ f(y)$$

$$y = f[\underbrace{f(y)}_x]$$

$$\exists x \in E / f(x) = y.$$

* f est injective.

$$f(a) = f(b) \rightarrow a = b?$$

$$\underbrace{f(a)}_{a'} = \underbrace{f(b)}_{b'} \rightarrow f(a') = f(b')$$

$$a' \in E \quad b' \in E$$

$$f[f(a)] = f[f(b)]$$

$$f \circ f(a) = f \circ f(b)$$

$$\text{Id}_E(a) = \text{Id}_E(b)$$

$$\underline{a = b}$$

Donc f est une transformation de E .

$$\exists f^{-1} \in \mathcal{B} \quad f : f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

$$\text{Or, } f \circ f = \text{Id}_E$$

$$f \circ f^{-1} = f \circ f$$

$$f^{-1}(f \circ f^{-1}) = f^{-1}(f \circ f)$$

$$\underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{\text{Id}_E} \circ f^{-1} = \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{\text{Id}_E} \circ f$$

$$\underline{f^{-1} = f}$$

La réciproque est-elle vraie?

$$\text{Si } f^{-1} = f, \text{ c'est-à-dire, alors, } f \circ f = \text{Id}_E ?$$

$$\underline{f \circ f^{-1}} = \underline{f \circ f} = \text{Id}_E \quad \text{oui.}$$

$\mathcal{L}(E, +, \cdot)$ espace vectoriel sur \mathbb{R} $\mathcal{L}(E, +, \cdot)$ espace vect. sur \mathbb{R}
 $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ espace vectoriel $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ espace vectoriel
 $(\mathcal{L}(E), +)$ espace vectoriel

$$\boxed{f^2 = \text{Id}_E \implies f^{-1} = f \quad (f \text{ involutive}).}$$

Structure d'espace vectoriel pour l'ensemble des applications linéaires de E vers F

1° $\forall f$ appl. lin. de E vers F .

$\forall g$ " " "

On montre que $f+g$ a le même caractère.

$$(f+g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) \downarrow + \uparrow g(\vec{u})$$

Soit A l'ensemble considéré.

$(A, +) =$ groupe commutatif.

2° $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in A, \lambda f \in A.$

$$(\lambda f)(\vec{u}) = \lambda \downarrow f(\vec{u}) \uparrow$$

On montre les 4 propriétés classiques, donc.

$(A, +, \cdot)$ espace vectoriel sur \mathbb{R}

Si l'on veut enrichir la structure de A par l'introduction de la loi \circ par exemple, on est obligé de le faire uniquement dans le cas où $F=E$, faute de quoi on composerait des applications linéaires telles que les ensembles de départ et d'arrivée seraient tous différents.

$$\text{ex. } f: E \rightarrow F$$

$$g: F \rightarrow G$$

$$\text{soit } f: E \rightarrow G$$

Donc reprenons les f de E dans E et appelons $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble qui, ci-dessus, était A .

1° $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$: espace vectoriel sur \mathbb{R} .

2° $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$: anneau unitaire non commutatif.

$$f : E \rightarrow E$$

$$g : E \rightarrow E$$

$$g \circ f : E \rightarrow E$$

17.10

L'opération \circ , interne dans $\mathcal{L}(E)$ est associative.

De plus, \circ est distributive sur $+$ (à g et à h .)

Enfin, $\exists ! \text{Id}_E / \forall f \in \mathcal{L}(E), f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f$

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ anneau unitaire non commutatif.

Groupe linéaire de $E = GL(E)$

$$GL(E) \subset \mathcal{L}(E)$$

$\forall f \in GL(E)$, f est une transformation de E

$$\exists f^{-1} \in GL(E) / f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$$

$$\underline{\text{Id}_E \in GL(E)}$$

On rappelle que \circ est associative $\forall f, g, h$

\circ n'est pas commutative

Σ

$(GL(E), \circ) =$ groupe non commutatif.

Remarque: f_0 , dite "application nulle" de E dans E , n'est pas élément de $GL(E)$:

$$\begin{aligned} f_0 : E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longrightarrow f_0(\vec{u}) = \vec{0}_E \\ \vec{v} &\longrightarrow f_0(\vec{v}) = \vec{0}_E \end{aligned}$$

$(GL(E), +)$ N groupe

Remarque

Les éléments de $GL(E)$ sont les automorphismes de E .

Homothéties vectorielles

$$\begin{aligned} h_\alpha : E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto h_\alpha(\vec{u}) = \alpha \cdot \vec{u}, \quad \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

α : rapport de l'homothétie.

1° h_α applique E dans E

2° h_α linéaire :

$$\left. \begin{aligned} h(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\vec{u} + \vec{v}) \\ h(\vec{u}) + h(\vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \end{aligned} \right\} h(\vec{u} + \vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$

$$\left. \begin{aligned} h(\lambda \vec{u}) &= \alpha (\lambda \vec{u}) \\ \lambda h(\vec{u}) &= \lambda \cdot \alpha \vec{u} \end{aligned} \right\} h(\lambda \vec{u}) = \lambda \cdot h(\vec{u})$$

3° h_α est bijective :

$$\exists h_{\frac{1}{\alpha}} : \begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ \vec{v} &\longrightarrow h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{v}) = \frac{1}{\alpha} \vec{v} \end{aligned}$$

$$h_\alpha \circ h_{\frac{1}{\alpha}} = h_{\frac{1}{\alpha}} \circ h_\alpha = \text{Id}_E$$

$\forall \vec{u} \in E$,

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{u}) &= h_\alpha \left[h_{\frac{1}{\alpha}}(\vec{u}) \right] \\ &= h_\alpha \left(\frac{\vec{u}}{\alpha} \right) \\ &= \vec{u} \end{aligned}$$

Donc $h_\alpha \in GL(E)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

On appelle \mathcal{H} l'ensemble des homothéties de E .

$$\mathcal{H} \subset GL(E)$$

(\mathcal{H}, \circ) : sous-groupe commutatif de $GL(E)$

* \circ interne dans \mathcal{H}

* \circ associative dans \mathcal{H}

* $\text{Id}_E \in \mathcal{H}$ et $\text{Id}_E(\vec{u}) = \underline{1} \vec{u}$

$$\forall h_{\frac{1}{\alpha}} \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad h_{\frac{1}{\alpha}} = (h_{\alpha})^{-1}$$

$$h_{\alpha} \circ h_{\beta} = h_{\beta} \circ h_{\alpha} \quad ?$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha} \circ h_{\beta}(\vec{u}) &= h_{\alpha}[h_{\beta}(\vec{u})] = h_{\alpha}(\beta \vec{u}) = \alpha \cdot (\beta \vec{u}) \\ &= \underline{\alpha \beta \vec{u}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\beta} \circ h_{\alpha}(\vec{u}) &= h_{\beta}[h_{\alpha}(\vec{u})] = h_{\beta}(\alpha \vec{u}) = \beta(\alpha \vec{u}) \\ &= \underline{\beta \alpha \vec{u}} \end{aligned}$$

Nous voyons que $h_{\alpha} \circ h_{\beta} = h_{\beta} \circ h_{\alpha}$
c'est commutative dans \mathcal{H}

(\mathcal{H}, \circ) = sous-groupe commutatif de $GL(E)$

Propriété particulière :

$$\forall h \in \mathcal{H}, \quad \forall g \in GL(E),$$

$$h \circ g = g \circ h$$

$$\forall \vec{u} \in E,$$

$$(h \circ g)(\vec{u}) = h[g(\vec{u})] = \underline{\alpha g(\vec{u})}$$

$$(g \circ h)(\vec{u}) = g[h(\vec{u})] = g(\alpha \vec{u}) = \underline{\alpha g(\vec{u})}.$$

Toute homothétie vectorielle de \vec{E} commute avec toute
bijection linéaire de \vec{E} , et même avec tout endomorphisme
de \vec{E} .

$$I_{E_0} \notin GL(E)$$

Si on adjoint à \mathcal{H} , I_{E_0} , on forme alors $\mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\}$
On se demande si ce nouvel ensemble muni de $+$ et de \circ
est un corps

Il suffit de vérifier:

$$1^\circ \forall f, g \in \mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\}, \forall g \in \mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\} \\ f + g \in \mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\} ?$$

$$\begin{aligned} * (h_\alpha + I_{E_0})(\vec{u}) &= h_\alpha(\vec{u}) + I_{E_0}(\vec{u}) \\ &= h_\alpha(\vec{u}) \end{aligned}$$

$$h_\alpha + I_{E_0} = h_\alpha$$

$$* I_{E_0} + I_{E_0} = I_{E_0}$$

$$\begin{aligned} * (h_\alpha + h_\beta)(\vec{u}) &= \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \\ &= (\alpha + \beta) \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * h_\alpha + h_\beta &= h_{\alpha+\beta} \quad \text{si et seulement si } \alpha + \beta \neq 0 \\ h_\alpha + h_\beta &= I_{E_0} \quad \text{si et seulement si } \alpha + \beta = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } f + g \in \mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\}$$

$$2^\circ \forall h_\alpha \in \mathcal{H}, \exists h_{-\alpha} \in \mathcal{H}$$

$$h_\alpha + h_{-\alpha} = h_{-\alpha} + h_\alpha = I_{E_0}$$

$$\text{Pour } I_{E_0}, \exists -I_{E_0} = I_{E_0} \quad / \quad I_{E_0} + I_{E_0} = I_{E_0}$$

$$\{\mathcal{H} \cup \{I_{E_0}\}, +, \circ\} = \text{corps commutatif}$$

18.10

Un isomorphisme
(12) (12)

$$\varphi: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$h_\alpha \longmapsto \alpha = \varphi(h_\alpha)$$

$$h_\beta \longmapsto \beta = \varphi(h_\beta)$$

$$h_\beta \circ h_\alpha \longmapsto \alpha\beta = \varphi(h_\beta \circ h_\alpha)$$

$$\boxed{\varphi(h_\beta \circ h_\alpha) = \varphi(h_\beta) \times \varphi(h_\alpha)}$$

φ est un homomorphisme de (\mathcal{H}, \circ) vers (\mathbb{R}^*, \times)

De plus, φ est bijjective:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \exists h_\alpha \in \mathcal{H}$$

h_α est unique.

Automorphismes involutifs de E , espace vectoriel sur \mathbb{R}

$$\sigma: E \longrightarrow E$$

$$\text{et } \sigma \circ \sigma = \text{Id}_E$$

Remarque: un endomorphisme involutif étant bijectif est alors nécessairement un automorphisme.

$$\forall \vec{x} \in E, \sigma(\vec{x}) = \text{image} \in E$$

$$\text{Introduisons } \vec{y} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \sigma(\vec{x})) \in E$$

$$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \sigma(\vec{x})) \in E$$

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$$

Les 2 relations ci-dessus sont vraies $\forall \vec{x} \in E$
et en particulier pour \vec{y} et \vec{z} .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{y} = \vec{y} + \vec{0} \\ \sigma(\vec{y}) = \vec{y} - \vec{0} \end{array} \right\} \underline{\sigma(\vec{y}) = \vec{y}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{z} = \vec{0} + \vec{z} \\ \sigma(\vec{z}) = \vec{0} - \vec{z} \end{array} \right\} \underline{\sigma(\vec{z}) = -\vec{z}}$$

Les \vec{y} sont invariants

Les \vec{z} sont transformés en leurs opposés par s

Inversement : tout vecteur invariant est un vecteur \vec{y} :

$$s(\vec{x}) = \vec{x} \quad \vdash \quad \vec{y} + \vec{z} = \vec{y} - \vec{z}$$

$$2\vec{z} = \vec{0} \quad \vdash \quad \vec{z} = \vec{0} \quad \vdash \quad \vec{x} = \vec{y}$$

Un transformé par s en son opposé est nécessairement un \vec{z} .

$$s(\vec{x}) = -\vec{x} \quad \vdash \quad \vec{y} - \vec{z} = -\vec{y} - \vec{z}$$

$$\vec{y} = \vec{0} \quad \vdash \quad \vec{x} = \vec{z}$$

L'ensemble des \vec{y} = ensemble des invariants par s .

L'ensemble des \vec{z} = ensemble des transformés par s en leurs opposés.

Le premier sera nommé E' .

Le second " " E'' .

$$\left. \begin{array}{l} \forall \vec{x} \in E, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{y} \in E', \vec{z} \in E'' \end{array} \right\} \vdash E = E' + E''.$$

On montre facilement que E' ensemble des invariants et E'' ensemble des \vec{z} / $s(\vec{z}) = -\vec{z}$, sont des espaces vectoriels.

La somme ci-dessus est-elle directe ?

oui si, et seulement si : $E' \cap E'' = \{\vec{0}\}$

$$\vec{x} \in E' \cap E'' \mapsto \begin{cases} o(\vec{x}) = \vec{x} \\ \text{et } o(\vec{x}) = -\vec{x} \end{cases}$$

$$\vec{x} = -\vec{x}$$

$$2\vec{x} = \vec{0} \mapsto \vec{x} = \vec{0}$$

oui, la somme est directe :

$$\underline{E = E' \oplus E''}$$

Réciproquement, si nous avons réussi à mettre E sous la forme $E = E' \oplus E''$

Si on appelle f l'application qui, à tout \vec{x} de E (puisque $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in E'$, $\vec{z} \in E''$) fait correspondre $f(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z}$.

On montre :

1/ que f est linéaire, donc endomorphisme de E .

2/ que f est involutive

3/ que $f(\vec{y}) = \vec{y}$

4/ que $f(\vec{z}) = -\vec{z}$

5/ f ainsi définie est unique.

Démonstration

$$\textcircled{1} * f(\vec{x} + \vec{x}') = \underbrace{(\vec{y} + \vec{y}')}_{\in E'} - \underbrace{(\vec{z} + \vec{z}')}_{\in E''}$$

$$= (\vec{y} - \vec{z}) + (\vec{y}' - \vec{z}')$$

$$f(\vec{x} + \vec{x}') = f(\vec{x}) + f(\vec{x}')$$

$$* f(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{y} - \lambda \vec{z} \quad \lambda \vec{y} \in E' \text{ et } \lambda \vec{z} \in E''$$

$$= \lambda (\vec{y} - \vec{z})$$

$$f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$

f est linéaire.

$$\textcircled{2} f \circ f = \text{Id}_E ?$$

oui si, $\forall \vec{x} \in E, (f \circ f)(\vec{x}) = \vec{x}$.

$$f \circ f(\vec{x}) = f(\underbrace{\vec{y} - \vec{z}}_{\substack{\in E' \\ \in E''}}) = \vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$$

f est involutive.

$$\textcircled{3} f(\vec{y}) = \vec{y} ?$$

$$\vec{y} = \vec{y} + \vec{0} \quad f(\vec{y}) = \vec{y} - \vec{0} \quad \text{oui.}$$

$$\textcircled{4} f(\vec{z}) = -\vec{z} ?$$

$\vec{z} = \vec{0} + \vec{z}$ décomposition unique.

$$f(\vec{z}) = \vec{0} - \vec{z} = -\vec{z} \quad \text{oui.}$$

⑤ f est unique.

$$\text{Si } \exists f' / \vec{x} = \underbrace{\vec{y}}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''} \quad (\text{unique})$$

$$\begin{aligned} f'(\vec{x}) &= \vec{y} - \vec{z} \\ &= f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Diverses sortes d'automorphismes involutifs

1° $\dim E = 1 \mapsto E = \text{droite vectorielle}$.

$$* \text{Id}_E \quad (\dim E' = 1, \dim E'' = 0)$$

$$* -\text{Id}_E = \lambda_{-1} \quad (\dim E' = 0; \dim E'' = 1)$$

2° $\dim E = 2 \mapsto E = \text{plan vectoriel}$

$$* \text{Id}_E$$

* toutes les symétries vectorielles par rapport à un $E'CE$,
 $\dim E' = 1$, et de direction $E''CE$, $E = E' \oplus E''$.

$$* -\text{Id}_E = \lambda_{-1}$$

3° $\dim E = 3$

$$* \text{Id}_E$$

* toutes les symétries vectorielles par rapport à $E'CE^2$,
 $\dim E' = 2$, et de direction $E''CE$, $E = E' \oplus E''$,
 $\dim E'' = 1$

* toutes les symétries vectorielles par rapport à $E'CE$,
 $\dim E' = 1$, et de direction E'' , $\dim E'' = 2$.

$$* -\text{Id}_E = \lambda_{-1}$$

voir livre C10 p 130, 131 et 132.

24.10

5

Projection vectorielle p

$$\vec{y} = \frac{1}{2} (\vec{x} + s(\vec{x}))$$

On convient de noter $\vec{y} = p(\vec{x})$

$$\vec{y} = p(\vec{x})$$

$$\vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''}$$

$$s(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{z}$$

p est appelée projection vectorielle de E , sur E' de direction E'' .

$$1^\circ p(\vec{x}) = \frac{1}{2} [\text{Id}_E(\vec{x}) + s(\vec{x})]$$

$$p = \frac{1}{2} (\text{Id}_E + s)$$

2° p est linéaire (cf cours de seconde).

3°

$$\begin{aligned} p \circ p &= \frac{1}{2} (\text{Id}_E + s) \circ \frac{1}{2} (\text{Id}_E + s) \\ &= \frac{1}{4} [\text{Id}_E + s + s + \underbrace{s \circ s}_{\text{Id}_E}] \\ &= \frac{1}{4} [2\text{Id}_E + 2s] \end{aligned}$$

$$p \circ p = \frac{1}{2} (\text{Id} + s) = p$$

Z

$$p \circ p = p$$

$$4^\circ \quad N_p = \{ \vec{x}, \vec{x} \in E \mid p(\vec{x}) = \vec{0} \}$$

$$\vec{x} = \underbrace{p(\vec{x})}_{\in E'} + \underbrace{\vec{z}}_{\in E''}, \quad \forall \vec{x} \in E$$

Alors $\vec{x} = \vec{z}$ dès que $\vec{x} \in N_p$

$$\vec{x} \in E'' \vdash \underline{N_p \subset E''}$$

$$\text{Si } \vec{x} \in E'', \quad \vec{x} = \vec{0} + \vec{z} \vdash p(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\vec{x} \in N_p$$

$$\text{donc } \underline{E' \subset N_p}$$

Z

Donc :

$$N_p = E''$$

$$\text{Im } p = E'$$

25.10

5° Soit p , endomorphisme de E , tel que :

$$p \circ p = p$$

p est donc un projecteur de E

$$\exists \text{Im } p \quad ; \quad \exists N_p$$

$$* \mathcal{I}m p \cap N_p = \{ \vec{0} \} ?$$

$$\forall \vec{x} \in \mathcal{I}m p \cap N_p ,$$

$$\vec{x} \in \mathcal{I}m p \longmapsto \exists \vec{x}' \in E / p(\vec{x}') = \vec{x} \quad (1)$$

$$\vec{x} \in N_p \longmapsto p(\vec{x}) = \vec{0}$$

$$\text{Or, } p \circ p = p \text{ . Donc (1): } p[p(\vec{x}')] = p(\vec{x})$$

$$(p \circ p)(\vec{x}') = p(\vec{x})$$

$$p(\vec{x}') = p(\vec{x})$$

$$p(\vec{x}') = \vec{0}$$

$$\vec{x} = \vec{0}$$

$$\underline{\mathcal{I}m p \cap N_p = \{ \vec{0} \}}$$

$$* \text{ Est-ce que } \forall \vec{x} \in E, \text{ on peut écrire } \vec{x} = \vec{y} + \vec{z},$$

$$\vec{y} \in \mathcal{I}m p, \vec{z} \in N_p ?$$

Si oui, $E = \mathcal{I}m p + N_p$ et, comme l'intersection des deux sous-espaces est $\{ \vec{0} \}$, on écrit pour finir

$E = \mathcal{I}m p \oplus N_p$ et on aura trouvé 2 sous-espaces supplémentaires :

$$E' = \mathcal{I}m p \quad ; \quad E'' = N_p \text{ et } E = E' \oplus E''$$

et $p =$ projection de E sur E' , suivant E'' .

démonstration

$$\vec{y} = p(\vec{x}), \text{ puisque } \vec{y} \in \mathcal{I}m p$$

$$\vec{z} = \vec{x} - p(\vec{x})$$

Est-ce que $\vec{z} \in N_p$?

Oui, si et seulement si $p(\vec{z}) = \vec{0}$

$$\begin{aligned} p[\vec{z}] &= p[\vec{x} - p(\vec{x})] \\ &= p(\vec{x}) - p(p(\vec{x})) = \vec{0} \end{aligned}$$



Tout projecteur p de E est une projection vectorielle sur $\text{Im } p$ suivant la direction de N_p .

On dit aussi: de l'espace $\text{Im } p$ et de direction N_p .

G.11

6

104

Barycentric

Espace affine

 $E =$ espace affine $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n\} =$ ensemble de points de E $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n\} =$ ensemble de réels associés respectivement aux points A_i .

$$b. \quad E \longrightarrow \vec{E}$$

$$M \longmapsto g(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$

$$M' \longmapsto g(M') = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{M'A_i}$$

$$g(M) - g(M') = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA_i} - \overrightarrow{M'A_i}) \quad \forall i \in [1, n] \cap M$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MM'}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)}_{\alpha} \overrightarrow{MM'}$$

$$g(M) = g(M') + \alpha \overrightarrow{MM'}$$

$$\text{et } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$g =$ fonction vectorielle de Dirichlet.

Z

On montre que f est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$

1° Si $\sum \alpha_i = \alpha = 0$

Alors $f(M) = f(M')$

* f n'est pas injective

* f est constante.

$\forall M \in E, f(\vec{M}) = \vec{u}$

2° Si $\sum \alpha_i = \alpha \neq 0$

Alors $M \neq M' \implies \vec{MM'} \neq \vec{0}$

$\implies \sum \alpha_i \vec{MM'} \neq \vec{0}$

et $f(M) \neq f(M')$

Donc f est injective

f est-elle surjective?

$\forall \vec{u} \in E$, existe-t-il $M \in E$ / $f(M) = \vec{u}$?

Choisissons $M' = O$, point fixe de E

L'égalité générale ci-dessus devient :

$$f(M) = f(O) + \sum \alpha_i \vec{MO}$$

Si $\exists M$ / $f(\vec{M}) = \vec{u}$, alors

$$\underbrace{f(\vec{u})}_{\text{donné}} = \underbrace{f(O)}_{\text{connu}} + \underbrace{\sum \alpha_i}_{\neq 0} \underbrace{\vec{MO}}_{\text{inconnu}}$$

$$\vec{MO} = \frac{\vec{u} - f(O)}{\sum \alpha_i}$$

$$\vec{OM} = \frac{g(O) - \vec{u}}{\sum \alpha_i} \quad \vdash \quad \exists! M$$

En refaisant le calcul avec un autre O' fixé, on trouverait un autre point unique M' tel que

$$\vec{O'M'} = \frac{g(O') - \vec{u}}{\sum \alpha_i}$$

On montre que $M' = M$

$$\exists! M \in E \quad / \quad g(M) = \vec{u}$$

g est donc bijective si et seulement si $\sum \alpha_i \neq 0$.

Barycentre

$$\vec{u} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \sum \alpha_i \neq 0, \quad \text{alors} \quad \exists! M = G \in E \quad / \quad g(G) = \vec{0}$$

$$\sum \alpha_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{GA_i} = \vec{0} \quad \vdash \quad G \text{ est le barycentre des } A_i (\alpha_i)$$

Propriétés

$$1^\circ \quad \forall M \in E, \quad \sum \alpha_i \vec{MA_i} = (\sum \alpha_i) \vec{MG}$$

En effet :

$$g(M) = g(M') + \sum \alpha_i \vec{MM'}$$

Dans le cas où $M' = G$, alors $f(M') = f(G) = \vec{0}$

$$\vec{MG} = \frac{\sum (\alpha_i \vec{MA}_i)}{\sum \alpha_i} \quad \text{ou: si } M=O, \quad \vec{OG} = \frac{\sum \alpha_i \vec{OA}_i}{\sum \alpha_i}$$

2° Coordonnées de G dans un repère cartésien donné $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou (O, \vec{i}, \vec{j}) , ou (O, \vec{i}) .

$$A_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \quad G \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \frac{\sum \alpha_i \vec{OA}_i}{\sum \alpha_i}$$

$$x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k} = \frac{1}{\sum \alpha_i} \cdot \sum \alpha_i (x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k})$$

$$x_G = \frac{\sum \alpha_i x_i}{\sum \alpha_i}$$

$$y_G = \frac{\sum \alpha_i y_i}{\sum \alpha_i}$$

$$z_G = \frac{\sum \alpha_i z_i}{\sum \alpha_i}$$

$$\vec{OG} = \frac{\sum \alpha_i \vec{OA}_i}{\sum \alpha_i}$$

Dans le cas où tous les coefficients sont égaux (non nuls),
la relation :

$$\vec{OG} = \frac{\sum \alpha_i \vec{OA}_i}{\sum \alpha_i} \quad \text{devient :}$$

$$\vec{OG} = \frac{\alpha_i \sum \vec{OA}_i}{\alpha_i \cdot n}$$

$$\vec{OG} = \frac{\sum \vec{OA}_i}{n} \quad G : \text{barycentre des } A_i$$

exemple : $n = 3$, A, B et C non alignés



$$\begin{cases} \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \\ \vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3} \end{cases}$$

$$3 \vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

$$O = A + 3 \vec{AG} = \underbrace{\vec{AB} + \vec{AC}}_{2 \vec{AA'}}$$

G : barycentre de $\{A, B, C\}$ ou centre de gravité
du triangle ABC .

exemple : $n=2$



G isobarycentre de A et B :

$$\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} = -\vec{GB}$$

$G = \omega$, milieu de AB .

3° G indépendant de l'ordre dans lequel les A_i sont donnés.

4° $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$A_i(\alpha_i) \mapsto G$ leur barycentre.

$A_i(\lambda \alpha_i) \mapsto G' = G$

$$\sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0}, \text{ alors } \sum (\lambda \alpha_i) \vec{GA}_i = \vec{0}$$

Donc G , barycentre des $A_i(\alpha_i)$ est celui des $A_i(\lambda \alpha_i)$

$$G = G' \quad (\exists! G')$$

5° $1 \leq k \leq n$

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n\}$$

On suppose que $\exists G$ barycentre des $A_i(\alpha_i) \quad \forall i \in [1, n]$

On choisit $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de façon que $\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0$

Alors $\exists g$ barycentre des A_i , $\forall i \in [1, k] \cap \mathbb{N}$
 $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{gA_i} = \vec{0}$ $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

La 2^e égalité, développée, donne :

$$(\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + \alpha_k \overrightarrow{GA_k}) + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\text{or } \overrightarrow{Gg} = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{GA_i}}{\sum_{i=1}^k \alpha_i}$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot \overrightarrow{Gg}$$

$$\sum \alpha_i \cdot \overrightarrow{Gg} + \alpha_{k+1} \overrightarrow{GA_{k+1}} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

G : barycentre de $\left\{ g \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) ; A_{k+1}(\alpha_{k+1}), \dots, A_n(\alpha_n) \right\}$

Le barycentre total des n points munis des n coefficients donnés coïncident donc avec le barycentre des $n - k + 1$ points suivants :

Le barycentre partiel de k points A_i , munis de la somme $\sum_{i=1}^k \alpha_i$, et des $n - k$ points restants munis de leurs coefficients.

Remarque

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 0 \quad \text{si } G$$

$$L \xrightarrow{\vec{g}(L)}$$

A_1

$$A_2 \xrightarrow{\vec{g}(A_2)}$$

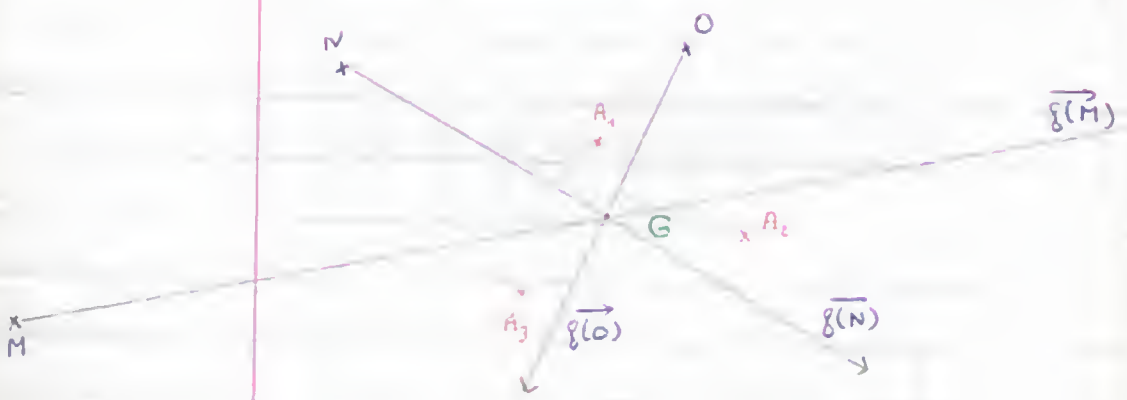
A_3

$$M \xrightarrow{\vec{g}(M)} Q'$$

$$O \xrightarrow{\vec{g}(O)} Q$$

\vec{z}

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i \neq 0 \quad \text{si } G$$



$$\sum \alpha_i \vec{MG} = \sum \alpha_i \vec{MA}_i$$

Théorème 1.1

Soit \vec{E} un espace vectoriel sur \mathbb{R}

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \vec{E} \quad M \in E, M = \text{points}$$

$$(M, M') \longmapsto \varphi(M, M') = \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \in \vec{E}$$

φ possède 2 propriétés.

$$1^\circ (A, B, C) \in E^3$$

$$\varphi(A, C) = \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$2^\circ \text{ Soit } \exists O \in E \text{ fixe.}$$

$$\varphi(O, M) = \overrightarrow{OM}$$

$$\varphi_0(O, M)$$

$$\varphi_0 : (O, M) \longmapsto \overrightarrow{OM} \quad \text{et } \varphi_0 \text{ bijective}$$

Conséquences

$$1^\circ \varphi(A, B) = \vec{0} \iff A = B$$

$$2^\circ \varphi(A, B) = -\varphi(B, A)$$

$$3^\circ \exists \text{ infinite } O, O', O'' \dots$$

φ_0 bijective, ainsi que $\varphi_{O'}$...

$$4^\circ (A, B) \mathcal{R} (C, D) \iff \varphi(A, B) = \varphi(C, D)$$

\mathcal{R} est une relation d'équivalence

$$5^\circ E_{\pi} : E \longrightarrow E$$

$$\begin{aligned}
 M &\longmapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \quad / \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \\
 \text{G} \vee \quad \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CD} \\
 \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{BD} && \text{permutation des moyennes.} \\
 \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{CA} && \text{" des extrêmes}
 \end{aligned}$$

Sous-espaces affines

$E' \subset E$, espace affine

Soit A fixé, $A \in E'$

Soit $\vec{E}' \subset \vec{E}$, \vec{E}' : sous-espace vectoriel de \vec{E} .

$$E' = \{ M, M \in E \mid \overrightarrow{AM} \in \vec{E}' \}$$

$$\vec{E}' = \{ \vec{u}, \vec{u} \in \vec{E}' \mid \exists ! M, M \in E' : \overrightarrow{AM} = \vec{u} \}$$

On dit aussi que E' est une variété affine de E .

Ensemble des barycentres de 2 points donnés distincts, puis de 3 points donnés non alignés, puis de 4 points donnés non coplanaires

Preliminaires

On appelle un repère affine un $(p+1)$ -uplet de points $\in E_p$, p désignant la dimension de l'espace affine E_p auquel appartiennent les points étudiés.

Tout repère affine sera construit de façon que un des $(p+1)$ points jouant le rôle principal, alors les p

suivants donneront naissance à p vecteurs formant une base de l'espace vectoriel associé \vec{E}_p .

ex: $(\vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}) = \text{base de } \vec{E}_2$

$(A_0, \vec{A_0A_1}, \vec{A_0A_2}) = \text{repère cartésien de } E_2$

$(A_0, A_1, A_2) = \text{repère affine de } E_2$.

En général $(A_0, A_1, A_2, \dots, A_p) = \text{repère affine de } E_p$ si et seulement si $(A_1, \vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_p}) = \text{repère cartésien de } E_p$.

18.11

1^{er} cas = 2 points A et B , $B \neq A$, sont donnés.

* $A(a)$, $B(b)$, $a+b \neq 0$

$\exists ! G$ barycentre de $A(a)$ et $B(b)$

$$a \vec{GA} + b \vec{GB} = \vec{0}$$

$$a \vec{GA} + b (\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{b \vec{AB}}{a+b} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$$

et $G \in (D)$, $D = (A, \vec{AB}) = (AB)$

Tous les G obtenus en faisant varier a et b , sous réserve que $a+b \neq 0$, appartiennent à la droite (AB)

En. des $G \in (AB)$

* Inversement, est-ce que tout point $M \in (AB)$ peut être considéré comme un barycentre de A et B ? Oui

si et seulement si $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 /$

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0}$$

$$M \in (AB) \quad \vdash \quad \vec{AM} = \lambda \vec{AB}$$

$$\vec{AM} = \lambda (\vec{AM} + \vec{MB})$$

$$\vec{0} = (1-\lambda) \vec{MA} + \lambda \vec{MB}$$

$$\underline{(1-\lambda) \vec{MA} + \lambda \vec{MB} = \vec{0}}$$

$$\text{Or } (1-\lambda) + \lambda = 1 \neq 0$$

Donc M est le barycentre de A(1-λ) et B(λ), la somme des coefficients étant 1

$(AB) \subset$ ensemble des G.

En résumé

ensemble des G = (AB)

Remarque : 1-λ et λ ne sont pas les seuls coefficients que l'on peut adjoindre à A et B, mais ce sont 2 coefficients remarquables.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\alpha(1-\lambda)$ et $\alpha\lambda$ sont des coefficients possibles pour le même M.

$$\left. \begin{array}{l} A(1-\lambda) \text{ et } B(\lambda) \\ A[\alpha(1-\lambda)] \text{ et } B[\alpha\lambda] \end{array} \right\} M = \text{barycentre}$$

2^e cas A, B, C non alignés

$$\star A(\alpha); B(\beta); C(\gamma) ; \quad \alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

$$\exists ! G / \quad \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}$$



(\vec{AB}, \vec{AC}) = base de l'espace vect. associé \vec{P} .

(A, \vec{AB}, \vec{AC}) = repère cartésien du plan affine (ABC)

$$G \in (ABC) \leftarrow \text{Ens des } G \in (ABC)$$

\star Inversement, est-ce que, $\forall M \in \text{plan } (ABC)$,

M = barycentre de A, B, C munis de coefficients a, b, c ?

Donc, oui si et seulement si $\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a+b+c \neq 0,$

$$a \vec{MA} + b \vec{MB} + c \vec{MC} = \vec{0}$$

$$\text{or } M \in (ABC) \leftarrow \vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$(1-\lambda-\mu) \vec{MA} + \lambda \vec{MB} + \mu \vec{MC} = \vec{0}$$

$$\text{et } (1-\lambda-\mu) + \lambda + \mu = 1 \neq 0$$

$$\text{oui } \exists a = 1 - \lambda - \mu$$

$$\exists b = \lambda$$

$$\exists c = \mu$$

Remarque

$$\exists (a', b', c') = \alpha (a, b, c) \quad , \quad \alpha \neq 0.$$

donc $(ABC) \subset \text{Ens. des } G$

Z

"L'ensemble des barycentres de 3 points non alignés est le plan affine déterminé par ces 3 points"

3^e cas. A, B, C, D non coplanaires.

$$\times \quad A(\alpha); B(\beta); C(\gamma); D(\delta); \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$$

$$\exists! G / \quad \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} + \delta \vec{GD} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \vec{AC} + \frac{\delta}{\alpha + \beta + \gamma + \delta} \vec{AD}$$

$G \in$ à l'espace affine de dimension 3 ayant pour repère cartésien : $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

En effet, \vec{AB} et \vec{AC} sont linéairement indépendants sinon A, B, C seraient alignés, et leur droite, avec D formeraient un plan (contradiction hypothèse).

$\exists \text{ plan}(A, B, C)$

Puis $D \notin (ABC) \implies (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$ linéairement indépendants

Donc : Ens des $G \subset$ esp. affine dim 3

* Inversement, $\forall M \in$ espace affine dim 3 contenant A, B, C, D , M est-il barycentre de A, B, C, D ?

$$\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC} + \nu \vec{AD}$$

$(\lambda, \mu, \nu) =$ coordonnées de M dans le repère cartésien $(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

$$\underbrace{(1 - \lambda - \mu - \nu)}_a \vec{MA} + \underbrace{\lambda}_b \vec{MB} + \underbrace{\mu}_c \vec{MC} + \underbrace{\nu}_d \vec{MD} = \vec{0}$$

$$a + b + c + d = 1 \neq 0$$

Donc : Esp. de dim 3 \subset Ens. des G

"L'ensemble des barycentres de 4 points A, B, C, D non coplanaires est l'espace affine de dimension 3 contenant les points A, B, C, D ."

Fonction scalaire de distances

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \varphi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 \end{array} \quad , \quad E = \text{espace affine euclidien}$$

$$\text{Rappel : } d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{\vec{AB}^2} = AB$$

$$\text{Ici } MA_i^2 = \vec{MA}_i^2$$

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}^2$$

Dans le cas de 3 points A_i , soit A, B, C :

$$\varphi(M) = \alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \overrightarrow{MC}^2$$

$$\varphi(M) = \alpha (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + \beta (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + \gamma (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2$$

$$\varphi(M) = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MO}^2 + \varphi(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \underbrace{(\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC})}_{\overrightarrow{f(O)}}$$

$$1^\circ \text{ Si } \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\text{Alors } \varphi(M) = \varphi(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{f(O)}$$

* Si $\overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{f(A)} = \overrightarrow{f(B)} = \overrightarrow{f(C)} = \vec{0}$, alors φ est elle aussi une fonction constante.

* Si $\overrightarrow{f(O)} = \overrightarrow{f(A)} = \overrightarrow{f(B)} = \overrightarrow{f(C)} \neq \vec{0}$, alors φ n'est pas constante

2° Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\exists ! G$ barycentre de $A(\alpha), B(\beta), C(\gamma)$

φ

$$\varphi(M) = \varphi(O) (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MO}^2 + \varphi(O) + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{f(O)}$$

$$O = G \quad \varphi(M) = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}^2 + \varphi(G) + \vec{0}$$

$$\text{car } \overrightarrow{f(G)} = \vec{0}$$

$$\boxed{\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}^2}$$

$$\varphi(G) = \alpha \overrightarrow{GA}^2 + \beta \overrightarrow{GB}^2 + \gamma \overrightarrow{GC}^2$$

La formule encadrée présente non seulement l'intérêt que $\varphi(G)$ est aisément calculable, mais encore que la lettre M y figure une fois et une seule dans l'expression de $\varphi(M)$

Z

$$\varphi(M) = \alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 + \gamma \overrightarrow{MC}^2$$

$$\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}^2$$

φ = fonction
scalare de
Leibnitz

Conséquences : Ensemble des points M tels que $\varphi(M) = k$, $k \in \mathbb{R}$

Supposons qu'on se donne un réel k . On veut résoudre $\varphi(M) = k$. Est-ce possible ?

$$\varphi(M) = k \mapsto \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ et } \varphi(O) + 2 \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{g(O)} = k \\ \text{ou} \\ \alpha + \beta + \gamma \neq 0 \text{ et } \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}^2 = k \end{cases}$$

21.11

1° Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$

Le problème à résoudre est.

$$\exists M \in E / \varphi(O) + 2 \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{g(O)} = k$$

(O fixé)

$$2 \overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{g(O)} = k - \varphi(O)$$

$$\varphi(O) = \alpha \overrightarrow{OA}^2 + \beta \overrightarrow{OB}^2 + \gamma \overrightarrow{OC}^2 \text{ connue}$$

* $\vec{g}(O)$ est un vecteur constant (voir $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et la fonction vectorielle de Seibitz), il se peut que $\vec{g}(O) = \vec{0}$

Alors

$$2 \vec{MO} \cdot \vec{g}(O) = R - \varphi(O)$$

Si R , donné, vérifie $R = \varphi(O)$, alors $\forall M \in E$, $\vec{MO} \cdot \vec{0} = 0$

Si $R \neq \varphi(O)$, $\exists M$ et Ensemble des $M = \emptyset$

* Si $\vec{g}(O) = \vec{m}$ constant $\neq \vec{0}$

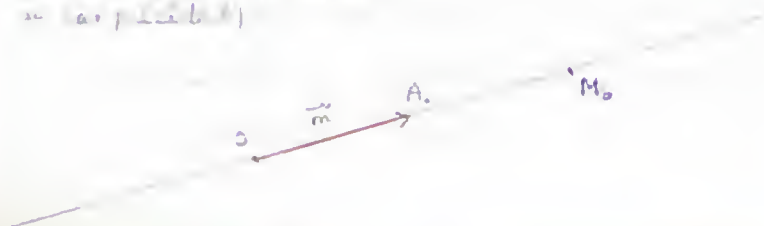
$$\text{Alors } \vec{MO} \cdot \vec{m} = \frac{R - \varphi(O)}{2}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{m} = \frac{\varphi(O) - R}{2}$$

$$\exists! A_0 \in E / \vec{OA}_0 = \vec{m}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{OA}_0 = \frac{\varphi(O) - R}{2}$$

(on peut dire que \vec{m} est le vecteur de Seibitz)



Cherchons, s'ils existent, des M_0 appartenant à la droite (OA_0) . Si oui :

$$\overrightarrow{OM}_0 = \lambda \overrightarrow{OA}_0$$

$$\text{Alors } \overrightarrow{OM}_0 \cdot \overrightarrow{OA}_0 = \lambda \overrightarrow{OA}_0^2$$

Si on donne $\overrightarrow{OA}_0 = \alpha \vec{z}$, alors $\overrightarrow{OA}_0^2 = \alpha^2 \vec{z}^2$ ($\alpha \neq 0$
car $\vec{m} \neq \vec{0}$)
et si $\|\vec{z}\| = 1$, alors $\overrightarrow{OA}_0^2 = \alpha^2$

De sorte que $\overrightarrow{OM}_0 \cdot \overrightarrow{OA}_0 = \lambda \alpha^2$

On doit avoir $\lambda \alpha^2 = \frac{1}{2} (\varphi(0) - k)$ d'où λ

$$\exists! \lambda / \overrightarrow{OM}_0 = \lambda \overrightarrow{OA}_0$$

$$\exists! M_0 / \overrightarrow{OM}_0 \cdot \overrightarrow{OA}_0 = \frac{1}{2} (\varphi(0) - k)$$

Si $M \neq M_0 \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \neq \vec{0}$, on doit avoir :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}_0 = \frac{1}{2} (\varphi(0) - k)$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}_0 = \overrightarrow{OM}_0 \cdot \overrightarrow{OA}_0$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA}_0 - \overrightarrow{OM}_0 \cdot \overrightarrow{OA}_0 = 0$$

$$(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}_0) \cdot \overrightarrow{OA}_0 = 0$$

$$\underbrace{\overrightarrow{M_0M}}_{\neq \vec{0}} \cdot \underbrace{\overrightarrow{OA}_0}_{\vec{m} \neq \vec{0}} = 0$$

Donc $\overrightarrow{M_0M}$ orthogonal à \overrightarrow{OA}_0 .



$P =$ plan affine de direction orthogonal à \underline{m} et contenant le point M_0

Inversement, $\forall M' \in P$ vérifie $\overrightarrow{M_0 M'} \cdot \underline{m} = 0$

$$\overrightarrow{OM'} \cdot \underline{m} = \overrightarrow{OM_0} \cdot \underline{m}$$

$$\text{G} \quad \overrightarrow{OM_0} \cdot \underline{m} = \frac{1}{2} (\varphi(0) - k)$$

$$\text{Donc} \quad 2 \overrightarrow{OM'} \cdot \underline{m} = \varphi(0) - k$$

$$k = \underbrace{\varphi(0) - 2 \overrightarrow{OM'} \cdot \underline{m}}_{\varphi(M')}$$

$$\text{car } -2 \overrightarrow{OM'} \cdot \underline{m} = 2 \overrightarrow{M_0 M'} \cdot \underline{m}$$

l'ensemble des points $M = \text{plan}(P)$, ou du moins, m est dans le cas le plus général de dimension 3

Si $\dim E = 2$, l'ens. des $M =$ droite de direction orthogonale à \underline{m} et passant par M_0

2° Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $\exists! G / \vec{g}(G) = \vec{0}$

$$\varphi(M) = \varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) MG^2$$

$$\varphi(M) = k \mapsto \underline{\varphi(G) + (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 = k}$$

$$\varphi(G) = \alpha \vec{GA}^2 + \beta \vec{GB}^2 + \gamma \vec{GC}^2$$

$$MG^2 = \frac{k - \varphi(G)}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Si $\frac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} > 0$, alors l'ensemble des M est

* si $\dim E = 1$, $\{M_1, M_2\}$

tels que $GM_1 = GM_2 = \sqrt{\frac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha}}$

* si $\dim E = 2$, cercle de rayon $\sqrt{\dots}$

* si $\dim E = 3$, sphère $(G, \sqrt{\dots})$

Si $\frac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} = 0$, alors $\exists! M = G$

Si $\frac{k - \varphi(G)}{\sum \alpha} < 0$, alors $\nexists M$

Applications affines

Définition

$$\begin{aligned}
 f: E &\longrightarrow E & E &= \text{espace affine} \\
 M &\longmapsto f(M) = M' \\
 N &\longmapsto f(N) = N'
 \end{aligned}$$

f est dite affine si et seulement si $\exists \varphi$, linéaire, de \vec{E} vers \vec{E} (espace vectoriel associé à E) telle que $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{f(M)f(N)}$, $\forall (M, N) \in E^2$

Remarque: φ est unique.

Si $\exists \psi$, \mathbb{R} -endomorphisme de \vec{E} , défini parallèlement

$$\begin{cases} \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \\ \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'} \end{cases} \quad \text{avec } M' = f(M) \text{ et } N' = f(N)$$

Alors $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, on va montrer que $\varphi(\vec{u}) = \psi(\vec{u})$

En effet: $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, et M donné, $M \in E$;

$\exists ! N / \overrightarrow{MN} = \vec{u}$, alors $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$

$$\psi(\vec{u}) = \psi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

Donc $\psi = \varphi$

L'endomorphisme φ associé à f est unique

pts équipollents :

f affine de E dans E

$$A' = f(A) \quad , \quad B' = f(B)$$

$$C' = f(C) \quad , \quad D' = f(D)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \vdash \quad \varphi(\overrightarrow{AB}) = \varphi(\overrightarrow{CD})$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$$

$\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont donc des vecteurs égaux

(A', B') et (C', D') sont des dipoints équipollents

(A, B) équipollents	\vdash	(A', B') équipollents
--------------------------	----------	----------------------------

composition de 2 applications affines

$$f: E \longrightarrow E$$

$$M \longmapsto f(M) = M'$$

$$g: E \longrightarrow E$$

$$M' \longmapsto g(M') = M''$$

$$g \circ f \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & (g \circ f)(M) = M'' \end{array}$$

f affine et g affine

$\exists ! \varphi$ endomorphisme de $\vec{E} / \forall (M, N) \in E^2, \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M''N''}$

$\exists ! \psi$ endomorphisme de $\vec{E} / \forall (M', N') \in E^2, \psi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{M''N''}$

Donc : $\psi[\varphi(\overrightarrow{MN})] = \overrightarrow{M''N''}$

$$\underbrace{(\psi \circ \varphi)}_{\text{linéaire}}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M''N''}$$

1) Il existe $(\psi \circ \varphi)$ endomorphisme de \vec{E} associé à $g \circ f$ puisque $g \circ f(M) = M''$

$$g \circ f(N) = N''$$

2) $\underline{g \circ f}$ est associé à $\underline{\psi \circ \varphi}$

Détermination d'une application affine

Supposons qu'on donne $A' = f(A)$; A et A' connus

Supposons, de plus, que φ linéaire de \vec{E} dans \vec{E} soit donnée.

f est une application de E dans E

$$\forall M \in E, \text{ soit } \underline{M' = f(M)}$$

Si $\varphi(\overrightarrow{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{donné}}}{AM}}) = \overrightarrow{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{donné}}}{A'M'}}$, cela est suffisant pour que

γ soit affine.

En effet, on va montrer que $\forall (M, N) \in E^2$, $N' = \gamma(N)$,

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{A'N'} - \overrightarrow{A'M'}$$

$$\text{Alors } \varphi(\overrightarrow{MN}) = \underbrace{\varphi(\overrightarrow{AN})}_{\overrightarrow{A'N'}} - \underbrace{\varphi(\overrightarrow{AM})}_{\overrightarrow{A'M'}} \quad (\varphi \text{ linéaire})$$

$$\underbrace{\overrightarrow{A'N'} - \overrightarrow{A'M'}}_{\overrightarrow{M'N'}}$$

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

Cas particulier : si $M = A$, alors $M' = A'$ et $\varphi(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{A'A'}$,
 $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$ (compatible avec la linéarité de φ)

5.12

étou sur la composée $g \circ \gamma$ de 2 applications affines

* Si γ et g sont bijectives, ce sont des transformations affines, et $g \circ \gamma$ est aussi une transformation affine.

Remarque.

$$(g \circ \gamma)^{-1} = \gamma^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\text{car } (g \circ \gamma) \circ (\underbrace{\gamma^{-1} \circ g^{-1}}_{Id_E}) = g \circ \underbrace{\gamma \circ \gamma^{-1}}_{Id_E} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_E$$

$$(\mathcal{G}^{-1} \circ \mathcal{G}^{-1}) \circ (\mathcal{G} \circ \mathcal{G}) = \text{Id}_E$$

$$\begin{aligned} * \mathcal{H}: \quad \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{L}(\vec{E}) & (\mathcal{L}(\vec{E}), +, \circ) &= \text{anneau} \\ \mathcal{G} &\longmapsto \mathcal{V} = \mathcal{H}(\mathcal{G}) \\ \mathcal{G}' &\longmapsto \mathcal{V}' = \mathcal{H}(\mathcal{G}') \\ \mathcal{G}' \circ \mathcal{G} &\longmapsto \mathcal{V}' \circ \mathcal{V} = \mathcal{H}(\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}) = \mathcal{H}(\mathcal{G}') \circ \mathcal{H}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(\mathcal{G}' \circ \mathcal{G}) = \mathcal{H}(\mathcal{G}') \circ \mathcal{H}(\mathcal{G})$$

\mathcal{H} est un homomorphisme.

Si les \mathcal{G} considérées sont bijectives, alors \mathcal{A} se change en \mathcal{B} , le groupe affine

Les \mathcal{V} associées sont, elles aussi bijectives (car $\mathcal{G} \circ \mathcal{G}^{-1} = \mathcal{G}^{-1} \circ \mathcal{G} = \text{Id}_E$; $\mathcal{V} \circ \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}^{-1} \circ \mathcal{V} = \text{Id}_{\vec{E}}$)

Alors $\mathcal{L}(\vec{E})$ se change en $GL(\vec{E})$

~~$\mathcal{A}(\vec{E})$~~

$$\mathcal{H}: \mathcal{B} \longrightarrow GL(\vec{E})$$

\mathcal{H} est un homomorphisme de groupes

Conservation du barycentre

$$G \text{ barycentre des } A_i(d_i) \longmapsto \sum \alpha_i \vec{GA}_i = \vec{0} \quad (1)$$

$$A'_i = \mathcal{G}(A_i), \quad \mathcal{G} \text{ affine de } E \text{ vers } E.$$

$$\circ G' = \mathcal{G}(G).$$

$$\varphi(\overrightarrow{GA_i}) = \overrightarrow{G'A_i}$$

$$(1) \vdash \varphi(\sum \alpha_i \overrightarrow{GA_i}) = \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\sum \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} = \vec{0} \quad \vdash \quad G' \text{ barycentre des } A_i(\alpha_i)$$

Remarques.

* Si $A_i \neq A_j \vdash A_i = A_j$, alors φ non injective.

$$\alpha_1 \overrightarrow{G'A_1} + \dots + \alpha_i \overrightarrow{G'A_i} + \dots + \alpha_j \overrightarrow{G'A_j} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{G'A_n} = \vec{0}$$

$$(\alpha_i + \alpha_j) \overrightarrow{G'A_i}$$

Tout se passe comme si A_i était affecté de $\alpha_i + \alpha_j$

* Milieu de (A, B) = barycentre de $A(1)$ et $B(1)$

$$\varphi(A) = A' \quad \varphi(B) = B'$$

$\exists!$ barycentre de $A'(1)$ et $B'(1)$ = milieu du couple (A', B')

Si φ non injective, B' peut être confondu avec A'
et alors le milieu de (A', A') est A' .

" L'image du milieu de (A, B) est le milieu de (A', B') .

$$* M \text{ décrit } [A, B] \vdash \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad (A \neq B)$$



et donc $0 \leq \lambda \leq 1$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$$

$$(1-\lambda) \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$$

$$(1-\lambda) \overrightarrow{MA} + \lambda \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$M = \text{barycentre de } \begin{cases} A(1-\lambda) \\ B(\lambda) \end{cases} \quad \{A(1-\lambda); B(\lambda)\} = F$$

$$\text{Soient. } M' = g(M) \quad A' = g(A) \quad B' = g(B)$$

$$M' = \text{barycentre de la partie } \{A'(1-\lambda); B'(\lambda)\}$$

$$\overrightarrow{OM} = (1-\lambda) \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OM'} = (1-\lambda) \overrightarrow{OA'} + \lambda \overrightarrow{OB'}$$

A

M'

B'

$$\text{et } 0 \leq \lambda \leq 1$$

et M' décrit $[A', B']$ (voir contradiction avec la chose de λ et la place de M' en dehors du segment).

* Alignement et ordre de (A, C, B)

A

C

B

A

C'

B'

$$A' = g(A)$$

$$B' = g(B)$$

$$C' = g(C)$$

* Ensemble des $M = \text{droite } (AB)$.

$\forall M \in (AB)$, $M = \text{barycentre de } A(\alpha) \text{ et } B(\beta)$
et $\alpha + \beta \neq 0$

$M' = f(M)$ est alors.

1° Si $A' \neq B'$, M' est aligné avec A' et B' .

2° Si $A' = B'$, alors $M' = A' = B'$ et la droite affine (AB) a pour image $\{A'\}$

* ~~P~~ Ensemble des $M = \text{plan } (ABC)$

$M = \text{barycentre de } A(\alpha), B(\beta), C(\gamma); \alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$M' = f(M) \in f(\text{plan}(ABC))$

1° il se peut que $M' \in \text{plan}(A'B'C')$

2° il se peut que $M' \in \text{droite } \underbrace{(A'B'C')}_{\text{alignés}}$

3° " " $M' \in A' = B' = C'$ alignés.

$f(\text{plans}(ABC)) = \{A'\}$

Image d'un sous-espace affine par une application affine

$\forall M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}')$; \vec{E}' sous-espace vectoriel de \vec{E} ,
 \vec{E} associé à E .

$\mathcal{V}(A, \vec{E}') = \text{variété affine passant par } A \text{ et de direction } \vec{E}' = \text{sous-espace affine de } \vec{E}$.

Preliminaires

$$\varphi: \vec{E} \longrightarrow \vec{E} \quad \vec{E}' \subset \vec{E}$$

$$\hat{\varphi}: \vec{E}' \longrightarrow \hat{\varphi}(\vec{E}')$$

sous-espace vectoriel ?

a) $\hat{\varphi}(\vec{E}') \neq \emptyset$ car $\exists \vec{0} \in \vec{E}'$

b) Stabilité de $\hat{\varphi}(\vec{E}')$ pour l'addition.

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \quad \varphi(\vec{u}) \text{ et } \varphi(\vec{v}) \in \hat{\varphi}(\vec{E}')$$

$$\varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) = \varphi(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\in \vec{E}' \text{ car } (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}'$$

$$\exists (\vec{u} + \vec{v}) \in \vec{E}' / \vec{u} + \vec{v} \text{ antécédent de } \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

c) Stabilité pour :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \varphi(\vec{u}) \in \hat{\varphi}(\vec{E}')$$

$$\lambda \varphi(\vec{u}) = \varphi(\lambda \vec{u})$$

$$\in \vec{E}' \text{ dès que } \vec{u} \in \vec{E}'$$

$$\exists (\lambda \vec{u}) \in \vec{E}' / \lambda \vec{u} \text{ antécédent de } \lambda \varphi(\vec{u})$$

$$\varphi(\vec{E}') = \text{sous-espace vectoriel}$$

Problème

$$\text{Revenons à } \mathcal{V}(A, \vec{E}') = \mathcal{V}$$

$$M' = \mathcal{G}(M) \quad \text{donc} \quad M' \in \mathcal{G}[\mathcal{V}(A, \vec{E}')]]$$

alors :

$$\begin{aligned} * \underline{\forall M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}')} &\hookrightarrow \vec{AM} \in \vec{E}' \hookrightarrow \varphi(\vec{AM}) \in \varphi(\vec{E}') \\ &\hookrightarrow \vec{A'M'} \in \varphi(\vec{E}') \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $M' \in \mathcal{V}(A', \mathcal{P}(\vec{E}')) = \mathcal{V}'$

↳ Inversement.

$$\forall \underline{M''} \in \mathcal{V}(A', \mathcal{P}(\vec{E}')) \mapsto \begin{array}{l} \overrightarrow{A'M''} \in \mathcal{P}(\vec{E}') \\ \underline{\vec{u}'} \in \mathcal{P}(\vec{E}') \end{array}$$

$$\exists \vec{u} \in \vec{E}' / \mathcal{P}(\vec{u}) = \vec{u}' = \overrightarrow{A'M''}$$

$$G_2, A' = \mathcal{J}(A)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{AM} ; \exists ! M \in \mathcal{V}(A, \vec{E}')$$

$$\underline{\overrightarrow{A'M''}} = \mathcal{P}(\underline{\overrightarrow{AM}})$$

$$\text{donc } M'' = \mathcal{J}(M) \quad \text{donc } \underline{M''} \in \underline{\mathcal{J}[\mathcal{V}(A, \vec{E}')]}$$

Résumé

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}(A, \vec{E}')) \subset \mathcal{V}'(A', \mathcal{J}\mathcal{P}(\vec{E}'))$$

$$\mathcal{V}'(A', \mathcal{P}(\vec{E}')) \subset \mathcal{J}(\mathcal{V}(A, \vec{E}'))$$

$$\text{Donc } \underline{\mathcal{J}(\mathcal{V}(A, \vec{E}')) = \mathcal{V}'(A', \mathcal{P}(\vec{E}'))}$$

dim $\mathcal{J}(E)$?

$$\text{Réciproque : } E' = \mathcal{V}(A, \vec{E}') \quad \text{et } \dim E' = p$$

$$\dim \mathcal{J}(E)?$$

$$\dim \mathcal{J}(E') = \dim \mathcal{P}(\vec{E}')$$

$$\forall \vec{u} \in \vec{E}', \quad \vec{u} = x\vec{e} + y\vec{f} + \dots + m\vec{w}$$

$$\varphi(\vec{u}) = x\varphi(\vec{e}) + y\varphi(\vec{f}) + \dots + m\varphi(\vec{w})$$

$$P = \{\varphi(\vec{e}), \varphi(\vec{f}), \dots, \varphi(\vec{w})\} = \text{partie de } p \text{ éléments} \\ = \text{générateurs de } \varphi(\vec{E}')$$

Cardinal $P \geq$ Cardinal d'une base de $\varphi(\vec{E}')$

(Base = partie génératrice minimale)

$$\dim \varphi(\vec{E}') \leq p$$

Il en est de même pour $\dim \varphi(\vec{E}') : \underline{\dim \varphi(\vec{E}') \leq \dim \vec{E}}$

"Pour que la dimension soit encore p , il serait suffisant que φ , donc φ , soit injective". En effet:

$\{\varphi(\vec{e}), \varphi(\vec{f}), \dots, \varphi(\vec{w})\}$ libre si et seulement si :

$$x\varphi(\vec{e}) + \dots + n\varphi(\vec{w}) = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad x = n = \dots = 0$$

Or ce sont les coordonnées de $\vec{0}$ dans \vec{E}' .

$$\text{Donc } N\varphi = \{\vec{0}\}$$

$$N\varphi = \{\vec{0}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ injective?}$$

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v}) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(\underbrace{\vec{u} - \vec{v}}_{\in N\varphi}) = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} - \vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \vec{v}$$

Donc φ injective. Voir exercice pour:

$$\underline{\varphi \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi \text{ injective.}}$$

Points invariants

$$\underline{M \text{ invariant par } f} \quad \vdash \quad f(M) = M' = M$$

$$\underline{A} \quad \quad \quad \quad \quad \vdash \quad f(A) = A' = A$$

$$\text{Alors : } \varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$$

$$\varphi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$$

et \overrightarrow{AM} invariant par φ

$$\overrightarrow{AM} = \vec{u}$$

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$$

Des \vec{u} , invariants par φ forment-ils un sous-espace vectoriel de \vec{E} ?

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$$

$$= \vec{u} + \vec{v} \quad , \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ invariants.}$$

$(\vec{u} + \vec{v})$ est aussi invariant

$$\varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u})$$

$$= \lambda \vec{u}$$

$(\lambda \vec{u})$ est aussi invariant

Remarque

Ce sous-espace n'est jamais vide ($\exists \vec{0} / \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$)
d'ensemble des points "

L'ensemble des points invariants par f , s'il n'est pas vide, est $v(A, \vec{E}')$, avec $A = A'$ et $\vec{E}' =$ ens. de vecteurs invariants.

Il se peut que $\exists M / f(M) = M$. Dans ce cas, l'ensemble vide \emptyset est l'ensemble des points invariants; il n'a pas de direction \vec{E}' .

Il se peut que $\exists! M / f(M) = M$

ex: $\exists! A / f(A) = A$ ens inv = $\{A\}$, de direction $\{\vec{O}\}$

Application affine de E_3 possédant au moins 4 points invariants non coplanaires

$$A \xrightarrow{f} A' = f(A) = A$$

$$B \xrightarrow{f} B' = B$$

$$C \xrightarrow{f} C' = C$$

$$D \xrightarrow{f} D' = D$$

$$f : (A, A'), \varphi$$

$$\varphi : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

$$\varphi = \text{Id}_{E_3}$$

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= P(\vec{OM}), \quad \text{car} \\ \vec{OM} &= \vec{OP} + \vec{PM} \\ \text{car } \vec{PM} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Donc f est une translation de vecteur \vec{AA}' .

$$\text{Car } \vec{AA}' = \vec{AA} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } f = \text{Id}_{E_3}$$

8.1

8

Homotheties - Translations

Translations

Z

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad t_{\vec{u}} : E &\longrightarrow E \\ (\vec{u} \text{ donné}) \quad M &\longmapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \quad / \quad \vec{MM'} = \vec{u}\end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad t_{\vec{u}} = \text{bijection affine de } E \text{ sur } E$$

* affine :

$$\begin{aligned}\vec{M'N'} &= \vec{M'M} + \vec{MN} + \vec{NN'} \\ &= -\vec{u} + \vec{MN} + \vec{u}\end{aligned}$$

$$\vec{M'N'} = \vec{MN} = \text{Id}_{E_3}(\vec{MN})$$

$\exists f = \text{Id}_{E_3}$, endomorphisme associé à $t_{\vec{u}}$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}} = \text{Id}_{E_3}$

* bijection :

$$\vec{MM'} = \vec{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{M'M} = -\vec{u}$$

$$t_{-\vec{u}} : M' \longmapsto M \quad / \quad \vec{M'M} = -\vec{u}$$

$$\exists t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$$

En effet $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}}(M) = t_{-\vec{u}}[M_1]$ avec $\overrightarrow{MM_1} = \vec{u}$
 $= M'$ avec $\overrightarrow{M_1M'} = -\vec{u}$

donc $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = \vec{0}$

et $t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = \text{Id}_E = t_{\vec{0}}$

③ Points invariants :

$\overrightarrow{MM} = \vec{u} \quad \mapsto \quad \vec{u} = \vec{0}$

Si \vec{u} donné $\neq \vec{0}$, 0 points invariants.

Si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}} = \text{Id}_E$,

④ Image d'un sous-espace de E = un sous-espace affine de même dimension

⑤ Toute application affine de E dans E associée à Id_E est une translation de E

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \quad \mapsto \quad \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'} \quad (\text{échange des extrêmes})$

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{PP'} = \dots$

$\forall M, M' = f(M), \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \text{ fixe}, \text{ donc } f = t_{\vec{u}}$

Pratiquement, pour montrer qu'une f de E dans E est une translation, on peut se servir :
 a) de la définition
 b) de la propriété caractéristique n° 5.

⑥ Soit \mathcal{T} = ensemble des translations de E .

(\mathcal{T}, \circ) = groupe commutatif isomorphe à $(\vec{E}_3, +)$.

A) * \circ interne

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} \in \mathcal{T}?$$

$$\begin{aligned} \forall M \in E, \quad t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}(M) &= t_{\vec{v}}(M_1) / \overrightarrow{MM_1} = \vec{u} \\ &= M' / \overrightarrow{M_1M'} = \vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{et } \overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

$$\exists t_{\vec{u}+\vec{v}} : M' = t_{\vec{u}+\vec{v}}(M)$$

$$\text{donc } t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

* \circ associative

$$* \exists t_{\vec{0}} = \text{Id}_E / \forall t_{\vec{u}} \in \mathcal{T},$$

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{0}} = t_{\vec{0}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}}$$

$$* \forall t_{\vec{u}} \in \mathcal{T}, \exists t_{-\vec{u}} \in \mathcal{T} / t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{-\vec{u}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{0}}$$

* \circ est commutative dans \mathcal{T}

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

$$B) \quad \gamma : (\mathcal{T}, \circ) \longrightarrow (\vec{E}, +) \quad \gamma \text{ bijective}$$

$$t_{\vec{u}} \longmapsto \gamma(t_{\vec{u}}) = \vec{u}$$

$$t_{\vec{v}} \longmapsto \gamma(t_{\vec{v}}) = \vec{v}$$

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} \longmapsto \gamma(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}) = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\varphi(t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}) = \varphi(t_{\vec{v}}) + \varphi(t_{\vec{u}})$$

⑦ $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère cartésien de E_3

$M(x, y, z)$

$M'(x', y', z')$

$\vec{u}(a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de E_3

$$\vec{MM}' = \vec{u} \mapsto \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

Homothéties

$$\begin{aligned} \text{① } h_{(\omega, \alpha)} : E &\longrightarrow E \\ \alpha \in \mathbb{R}^* \quad M &\longmapsto M' / \vec{\omega M'} = \alpha \vec{\omega M} \end{aligned}$$

$$\alpha = 1, \vec{\omega M'} = \vec{\omega M} \mapsto M' = M \quad \forall M \in E$$

$$h_{(\omega, 1)} = \text{Id}_E, \quad \forall \omega \in E$$



$\alpha > 0$

M'

M

$\alpha < 0$

M'

② $h_{(\omega, \alpha)} =$ bijection affine de E sur E .

* affine :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{\omega M} \\ \overrightarrow{\omega N'} = \alpha \overrightarrow{\omega N} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\omega N'} - \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \alpha \overrightarrow{MN}$$

$\exists \varphi = h_\alpha$ endomorphisme associée de \vec{E}

* bijection :

$$h_{(\omega, \frac{1}{\alpha})} : M' \mapsto M$$

$$/ \overrightarrow{\omega M} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{\omega M'}$$

$$\exists h_{(\omega, \frac{1}{\alpha})}^{-1} = h_{(\omega, \frac{1}{\alpha})}$$

③ Points invariants.

$$\overrightarrow{\omega M} = \alpha \overrightarrow{\omega M} \mapsto (1 - \alpha) \overrightarrow{\omega M} = \vec{0}$$

Si $\alpha \neq 1$, $\exists ! \omega$ invariant

④ Image d'un sous-espace de $E =$ un sous-espace affine de même dimension.

⑤ Toute application affine de E dans E associée à une homothétie vectorielle h_α ($\alpha \neq 0$) est une

$\alpha \neq 1$

Homothétie.

* Gu, si et seulement si on en détermine le centre.

Par exemple : h définie par $(A, A'), h_\alpha$.

Existe-t-il au moins 1 point invariant. Si oui, soit ω , alors

$$h_\alpha(\vec{A\omega}) = \vec{A'\omega}$$

$$\alpha \vec{A\omega} = \vec{A'\omega}$$

$$\vec{\omega A'} = \alpha \vec{\omega A}, \quad \omega?$$

$$\alpha \vec{\omega A} - \vec{\omega A'} = \vec{0}$$

ω = barycentre de $\{A(\alpha), A'(-1)\}$ si et seulement si $\alpha \neq 1$.

$\exists! \omega$

ou encore : $\alpha \vec{\omega A} = \vec{\omega A} + \vec{AA'}$

$$(\alpha - 1) \vec{\omega A} = \vec{AA'}$$

$$\text{si } \alpha \neq 1 \text{ alors } -\vec{\omega A} = \frac{\vec{AA'}}{1 - \alpha}$$

$\frac{1}{1 - \alpha}$ = abscisse de ω dans $(A, \vec{AA'})$.

$\exists! \omega$

Si $\alpha = 1$, $(\alpha - 1) \vec{\omega A} = \vec{AA'}$

$$0 \cdot \vec{\omega A} = \vec{AA'}$$

$(A, A' \text{ données})$

* si $A' \neq A$, $\exists \omega$

* Si $A' = A$, f définie par $((A, A) \text{Id}_E)$

$$O. \vec{\omega A} = \vec{O} \quad , \quad \text{ou} \quad \forall \omega \in E$$

$$f = \text{Id}_E$$

Dans la pratique, savoir que f affine associée à h_α , $\alpha \neq 1$ est une homothétie.

⑥ $(\mathcal{H}_\omega, o) =$ groupe commutatif isomorphe à (\mathbb{R}^*, \times)

A) * o interne

$$h_{(\omega, \beta)} \circ h_{(\omega, \alpha)} =$$

$$M \xrightarrow{h_{(\omega, \alpha)}} M_1 \xrightarrow{h_{(\omega, \beta)}} M'$$

$$\vec{\omega M_1} = \alpha \vec{\omega M}$$

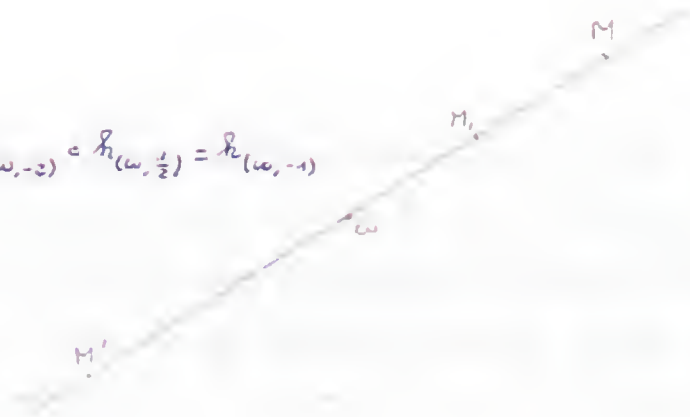
$$\vec{\omega M'} = \beta \vec{\omega M_1}$$

$$\vec{\omega M'} = (\alpha \beta) \vec{\omega M}$$

$\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ car $h_{(\omega, \alpha)}$ est une homothétie
(idem β)

Donc $\alpha \beta \neq 0 \vdash M'$ image de M par $h_{(\omega, \alpha \beta)}$

$$\text{ex : } h_{(\omega, -2)} \circ h_{(\omega, \frac{1}{2})} = h_{(\omega, -1)}$$



$$* \exists h_{(\omega, 1)} = \text{Id}_E$$

$$* \forall h_{(\omega, \alpha)} \in \mathcal{H}_\omega, \exists (h_{(\omega, \alpha)})^{-1}$$

$$h_{(\omega, \alpha)} \circ \underbrace{h_{(\omega, \frac{1}{\alpha})}}_{h_{(\omega, \alpha)}^{-1}} = h_{(\omega, 1)} = \text{Id}_E$$

$$* \underbrace{h_{(\omega, \beta)}}_{\uparrow} \circ \underbrace{h_{(\omega, \alpha)}}_{\uparrow} = h_{(\omega, \alpha)} \circ \underbrace{h_{(\omega, \beta)}}_{\uparrow} = h_{(\omega, \alpha\beta)}$$

$$b) \quad \varphi : (\mathcal{H}_\omega, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$$

$$h_\alpha \longmapsto \varphi(h_\alpha) = \alpha$$

$$\boxed{\varphi(h_\beta \circ h_\alpha) = \varphi(h_\alpha) \times \varphi(h_\beta)}$$

De plus, φ est bijective.

$\varphi =$ isomorphisme de groupes

⑦ Expression analytique

$\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère cartésien de E_3

$$h_{(\omega, \alpha)} \quad \omega(x_0, y_0, z_0) \\ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$M' = h_{(\omega, \alpha)}(M) \mapsto \overrightarrow{\omega M'} = \alpha \overrightarrow{\omega M}$$

$$\begin{cases} x' = x_0 + \alpha(x - x_0) \\ y' = y_0 + \alpha(y - y_0) \\ z' = z_0 + \alpha(z - z_0) \end{cases} \quad \begin{matrix} x' = x_0 + \\ y' = y_0 + \\ z' = z_0 + \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x' = \underline{\alpha} x + a \\ y' = \underline{\alpha} y + b \\ z' = \underline{\alpha} z + c \end{cases}$$

Homothéties - translations

Z

* $\forall f \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T} \mapsto f$ associé est une homothétie vect.
Ceci a été démontré (4 démonstrations).

* $(\mathcal{H} \cup \mathcal{T}, \circ) =$ groupe non commutatif

$$\forall (f, g) \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})^2,$$

$\exists ! \varphi$ associée à g et $\varphi =$ homothétie vectorielle

$\exists ! \varphi' \quad " \quad \text{à } g \quad \text{et } \varphi' = \text{hom. vect.}$

$\varphi' \circ \varphi =$ endomorphisme associé à $g \circ g$

$\varphi' \circ \varphi =$ composée de 2 hom. vect. = hom. vect.

Donc $g \circ g \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

De plus $\text{Id}_E \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$

$$\text{Id}_E \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T} \quad \mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{ \text{Id}_E \}$$

$\forall h \in \mathcal{H}, \quad h$ bijective

$\forall t \in \mathcal{T}, \quad t$ bijective.

Sur les 4 exemples qui suivent, on vérifiera la non commutativité

Exemples

$$\textcircled{1} \quad h_{(\omega_2, \alpha_2)} \circ h_{(\omega_1, \alpha_1)} \in \mathcal{H} \cup \mathcal{T}$$

* Supposons $\alpha_1 \alpha_2 \neq 1$. On est sûr alors (voir endomorphismes) que le "produit" est une homothétie, de rapport $\alpha_1 \alpha_2$ mais de centre inconnu ; or ce centre est l'unique point invariant de $h_2 \circ h_1$

$$\omega \xrightarrow{h_1} \omega' \xrightarrow{h_2} \omega \quad \downarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega_1 \omega'} = \alpha_1 \cdot \overrightarrow{\omega_1 \omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega'} \end{cases} \quad \vdash \quad \overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 (\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega'})$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \alpha_2 \alpha_1 \overrightarrow{\omega_1 \omega}$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \alpha_2 \alpha_1 \overrightarrow{\omega_1 \omega}$$

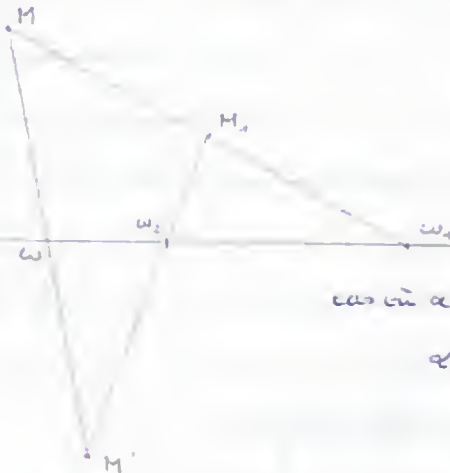
$$(1 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega} = (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$(1 - \alpha_1 \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega} = (1 - \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}$$

$$\text{d'où : } \boxed{\overrightarrow{\omega_1 \omega} = \frac{1 - \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2} \cdot \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}}$$

ω, ω_1 et ω_2 sont donc alignés.

$$f_{h_{(\omega_2, \alpha_2)}} \circ h_{(\omega_1, \alpha_1)} = h_{(\omega, \alpha_1 \alpha_2)}$$



$$\cos \hat{\omega} \alpha_2 = -2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}$$

* Si $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ (ex. $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ et $\alpha_2 = 2$)

$$h_2 \circ h_1 = t_{\vec{u}} \quad , \quad \vec{u} ?$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'} \quad , \quad \forall M \in E \quad , \quad M' = (h_2 \circ h_1)(M)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{\omega_1 \omega'_1} \quad / \quad \omega'_1 = h_2(\omega_1) \quad \text{car } h_1(\omega_1) = \omega_1$$

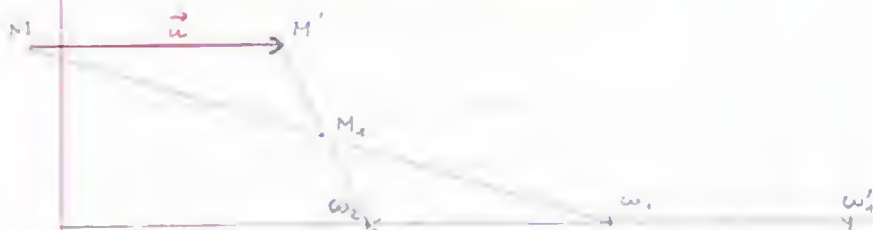
notons alors :

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega'_1} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\overrightarrow{\omega_2 \omega_1} + \overrightarrow{\omega_1 \omega'_1} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\vec{u} = (\alpha_2 - 1) \overrightarrow{\omega_2 \omega_1}$$

$$\vec{u} = (1 - \alpha_2) \overrightarrow{\omega_1 \omega_2}$$



$$h_2 \circ h_1 = t_{\vec{u}} \quad , \quad \text{si } \alpha_1 \alpha_2 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad h_{(\omega_2, \alpha_2)} \circ t_{\vec{u}} = ?$$

$$\alpha_2 \neq 1$$

Il s'agit ici, car endomorphisme d'une

homothétie de centre inconnu et de rapport α_2 .

$$\omega \xrightarrow{t_{\vec{u}}} \omega' \xrightarrow{h_2} \omega$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega\omega'} = \vec{u} \\ \overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2\omega'} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \overrightarrow{\omega_2\omega} + \alpha_2 \vec{u}$$

$$(1 - \alpha_2) \overrightarrow{\omega_2\omega} = \alpha_2 \vec{u}$$

$$\overrightarrow{\omega_2\omega} = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} \vec{u}$$

$\overrightarrow{\omega_2\omega}$ colinéaire à \vec{u}

③ Nous conseillons au lecteur de faire seul la composition $t_{\vec{u}} \circ h_{(\omega_1, \alpha_1)}$.

Projections sur D (ou P), parallèlement
à D' (ou P')

* dans E_2 : sur D , parallèlement à D'

* dans E_3 : sur D , " à P'

* dans E_3 : sur P , " à P'

① Définition

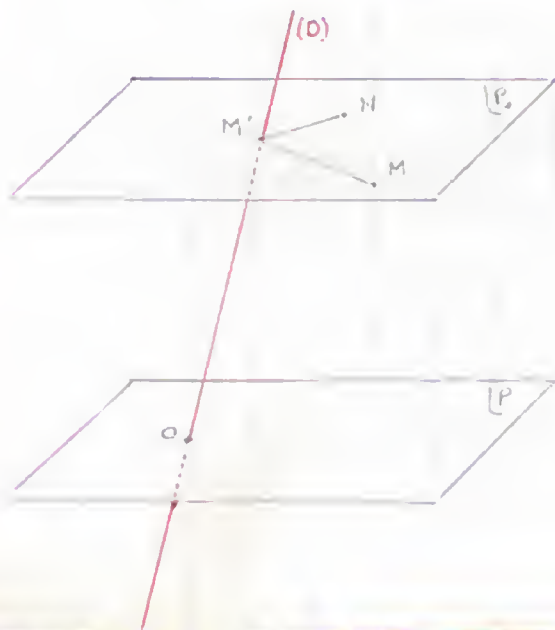
$$D \cap P = \{O\}$$

$p: M \mapsto M' \in D$, par exemple (2^e cas)

$$M' = p(M)$$

$$\{M'\} = D \cap \mathcal{V}(M, \vec{P})$$

so-espace affine de direction P et passant par M .



p n'est ni surjective (voir à l'ensemble des images) ni injective (voir M et $N \in P_1$)

② p est affine.

$$p(O) = O$$

$$\vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{M'M}$$

$$\vec{u} = \vec{u'} + \vec{u''}$$

$$\vec{u} \in \vec{D} \quad \vec{u'} \in \vec{P} \quad \vec{u''} \in \vec{P}$$

\vec{D} et \vec{P} supplémentaires dans \vec{E}_3

$\vec{u'} = \pi(\vec{u})$, $\pi =$ projection vectorielle sur \vec{D}
de direction \vec{P} ($\vec{P} = N_\pi$)

$\exists \pi$ endomorphisme de \vec{E}_3 associé à p

$p(10,0), \pi)$ est affine

③ Image d'une droite.

* ~~Demo~~ Soit un point, soit la droite (D) suivant que $\Delta \subset P_1$, par exemple $(P_1 // P)$ ou que $\Delta \cap P_1 = \{\omega\}$

④

Si l'on choisit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ avec
 $\{\vec{u}, \vec{v}\} =$ base de \vec{P} et $\{\vec{w}\} =$ base de \vec{D}

alors

$$M_{(\pi, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$$M(x, y, z) \quad M'(x', y', z')$$

$$\vec{OM}' = \pi(\vec{OM})$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = M_{\pi} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = z \end{cases}$$

Nous conseillons au lecteur de faire les deux autres cas.

17.1

10

Involutions affines

①

$$f: E \longrightarrow E \quad (E_2 \text{ ou } E_3)$$

$$\underline{f \circ f = \text{Id}_E}$$

$$f[f(M)] = M$$

$$\underline{f \circ f(M) = M, \quad \forall M \in E}$$

② $\exists!$ φ endomorphisme associé ; φ est-il involutif ?

oui si . $\varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\vec{E}}$

Soit $f(M) = M'$

$$f(N) = N'$$

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{M'N'}) &= \overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{f(M')f(N')} = \overrightarrow{f^2(M)f^2(N)} \\ &= \overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

$$\varphi(\overrightarrow{M'N'}) = \overrightarrow{MN}$$

$$\varphi \circ \varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{MN}$$

$$\varphi \circ \varphi(\vec{u}) = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{E} \quad (\forall \vec{u}, \exists (M, N) \in E^2)$$

et φ involutif (on connaît toutes les sorts de φ inv de \vec{E}_2 ou \vec{E}_3)

③ φ involutive $\longleftarrow \varphi$ bijective $\longleftarrow \underline{g}$ bijective

④ Milieu de $(M, M') =$ barycentre de $\{M(1); M'(1)\}$

$$1 \cdot \vec{\omega M} + 1 \cdot \vec{\omega H'} = \vec{0}$$

$$\vec{\omega H'} = - \vec{\omega M}$$

$g(\omega) = \omega' =$ barycentre de $\{g(M)(1); g(M')(1)\}$
de $\{M'(1); M(1)\}$

Il s'agit du même ensemble de points (par le même couple), donc du même milieu

$\omega' = \omega$ et ω est invariant par g involutive.

Une g affine involutive possède donc toujours au moins un point invariant

⑤ On vient de voir que: $\{g \text{ affine invol.} \longleftarrow \varphi \text{ involutive}\}$
 $\{g \text{ affine invol.} \longleftarrow \exists \omega \text{ invariant}\}$

Inversement, $g(A, A', \varphi \text{ involutif})$ est-elle involutive?

En général non, car g ne possède peut-être pas de points invariants.

Mais $g(\underset{\uparrow}{(1)}, \underset{\uparrow}{\omega}, \omega), \varphi \text{ involutif})$ est-elle involutive?

$$M' = g(M), \quad \forall M \in E$$

$$\varphi(\vec{\omega M}) = \vec{\omega M'}$$

$$\alpha \quad \varphi \circ \varphi = \text{Id}_{\vec{E}}$$

$$\varphi \circ \varphi (\overrightarrow{\omega M}) = \overrightarrow{\omega M}$$

$$\varphi (\overrightarrow{\omega M'}) = \overrightarrow{\omega M}$$

$$f(M') = M''$$

$$\overrightarrow{\omega M''} = \overrightarrow{\omega M}$$

$$M'' = M$$

$$f \circ f(M) = M, \quad \forall M \in E$$

$$f \circ f = \text{Id}_E$$

Z

$$f[(\omega, \alpha), \varphi \text{ involutif}] \vdash f = \text{involution affine}$$

⑥ Nature des involutions affines de E_2 et E_3

Ⓐ Rappel.

Matrices possibles des automorphismes involutifs de \vec{E}_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrice de $\text{Id}_{\vec{E}_2}$
dans (\vec{i}, \vec{j})
quelconque

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\vec{u}) &= \vec{u} \\ f(\vec{v}) &= -\vec{v} \\ \vec{u} &\in \vec{E}' \\ \vec{v} &\in \vec{E}'' \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-\text{Id}_{\vec{E}_2} = \mathcal{R}_{-\pi}$$

base quelconque

$\vec{E}' \oplus \vec{E}'' = \vec{E}_2$ ← symétrie vectorielle par rapport à \vec{E}'
de direction \vec{E}''

La base (\vec{u}, \vec{v}) qui a permis d'écrire la matrice remarquable $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ a été construite avec $\vec{u} \in \vec{E}'$ et $\vec{v} \in \vec{E}''$.

Choisissons maintenant, dans E_2 , un repère

$$R_0 = (\omega, \vec{u}, \vec{v}) ; \quad \underline{g(\omega) = \omega}.$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{\omega}\vec{\omega}}$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

axe de la symétrie



$$M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une symétrie par rapport à une droite parallèlement à une droite

La 3-matrice $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ associée au couple (ω, ω) donne $R_{(\omega, -1)}$

$$M \mapsto M' = h_{(\omega, -1)}(M) = M \quad / \quad \vec{\omega M}' = -\vec{\omega M}$$

Dans $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \quad \exists! \omega \text{ invariant.}$$

② Involutions affines de E_3 .

4 types, suivant la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si $\mathcal{O} = (\omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}'$ (ou \vec{E}'')
 $\vec{w} \in \vec{E}''$ (ou \vec{E}')

Les 2 matrices intermédiaires donnent lieu aux formules

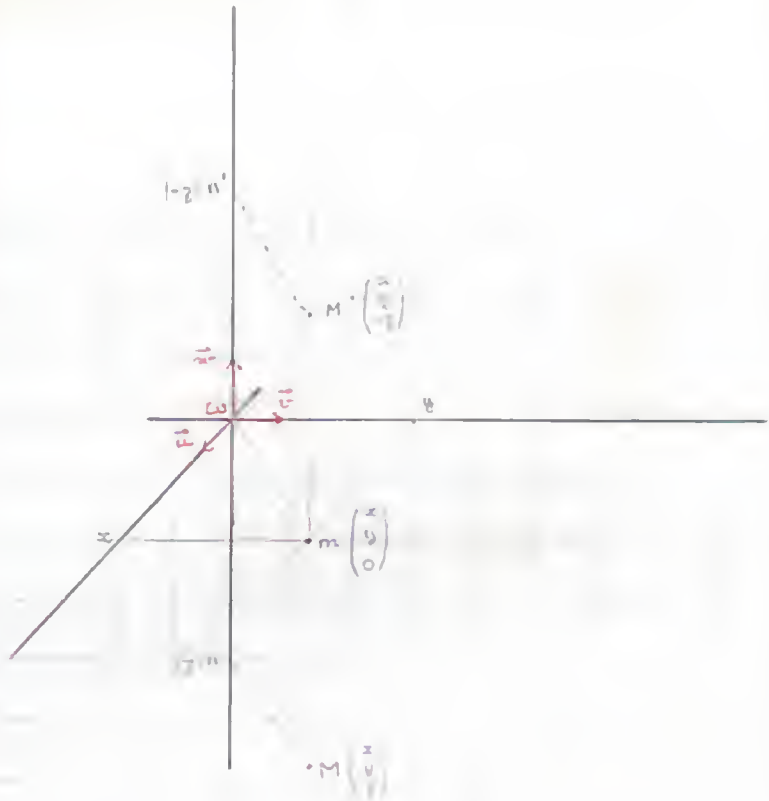
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

Comme $M(x, y, z)$, $\omega(0, 0, 0)$, $\vec{\omega M}(X=x, Y=y, Z=z)$

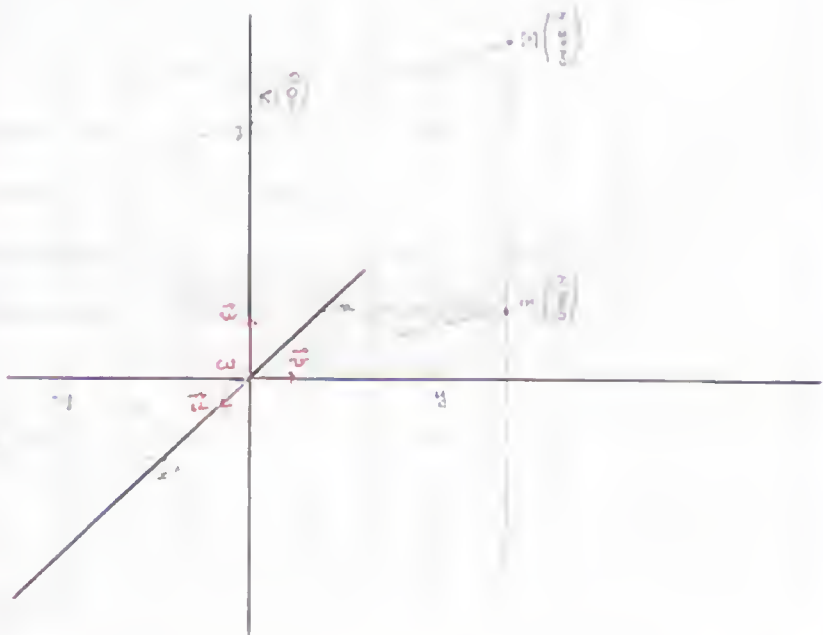
$$\vec{\omega M}'(X'=x', Y'=y', Z'=z')$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$$

symétrie parallèlement
à (ω, \vec{v}) et par
rapport à $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$



symétrie par rapport
à (ω, \vec{v}) de direction
 $(\omega, \vec{u}, \vec{v})$



12 2

11

Transformations orthogonales

Définition - Propriétés - Groupe orthogonal

voir livre (C10 175)

Transformation orthogonale involutive de \vec{E} ($\dim \vec{E} = 1, 2$ ou 3)On connaît toutes les transformations involutives de \vec{E} .

(dimension 1 : il y en a 2

" 2 : il y en a de 3 sortes

" 3 : il y en a de 4 sortes)

* Orthogonales: que peut-on dire des sous-espaces vectoriels supplémentaires \vec{E}' et \vec{E}'' dont on connaît l'existence et la propriété.

$$\forall \vec{w} \in \vec{E}, \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} \in \vec{E}', \vec{v} \in \vec{E}''$$

$$\vec{v}(\vec{w}) = \vec{u} - \vec{v}$$

$$\gamma \text{ orthogonale} \quad \hookrightarrow \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$$

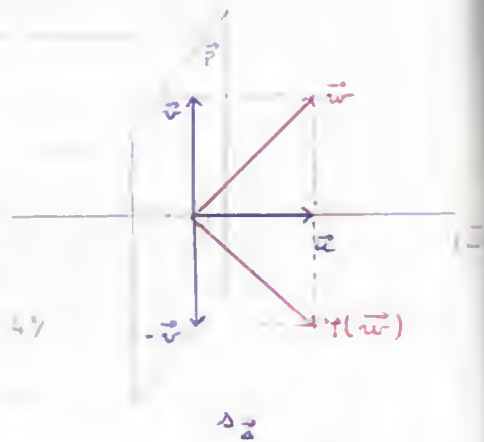
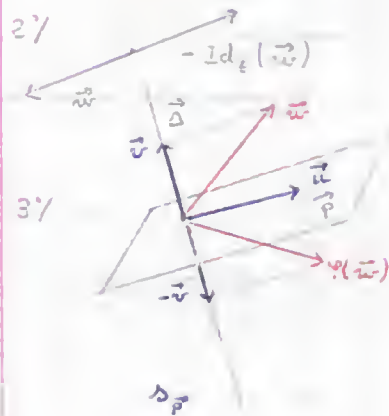
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Si aucun des vecteurs \vec{u} et \vec{v} n'est nul (c'est le cas lorsque \vec{E}' et \vec{E}'' sont de dimension 1 ou 2 dans des

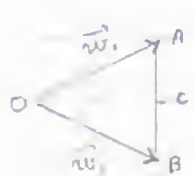
Z

espaces de dimension 2 ou 3) alors $\vec{u} \perp \vec{v}$ et ceci
 $\forall \vec{u} \in \vec{E}', \forall \vec{v} \in \vec{E}''$

\vec{E}' orthogonal à \vec{E}'' (rappel : $\vec{E}' \oplus \vec{E}'' = \vec{E}$)



Inversement, si l'on se donne deux vecteurs \vec{w}_1 et \vec{w}_2
 de même norme, et non colinéaires ; existe-t-il au
 moins une symétrie vectorielle orthogonale distincte
 de $\text{Id}_{\vec{E}}$ et de $-\text{Id}_{\vec{E}}$ telle que $\vec{w}_2 = s(\vec{w}_1)$
 (d'ailleurs, alors on aurait $\vec{w}_1 = s(\vec{w}_2)$)



$$\vec{AB} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$$

Ce vecteur a pour support une
 droite vectorielle qui est

(ou qui est incluse dans) le sous-espace vectoriel des vecteurs transformés en leur opposé par s éventuelle. Dans un espace de dimension 3, il existe s_p orthogonal, \bar{P} étant orthogonal à $\overrightarrow{AB} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$.

Si on désigne une s_z , c'est la droite affine \overrightarrow{OC} qui fournit la direction de $\vec{\Delta}$ de vecteur directeur $\frac{1}{2}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2)$.

Orientation du plan vectoriel euclidien (niveau 1)

Rotation vectorielle de l'espace E_3

Orientation de l'espace E_3

Produit vectoriel

Toutes ces études sont à faire sur le livre. (C10)

Angles de rotation le champs vectoriels

\exists deux angles de bivecteurs

1° angle (\vec{u}_1, \vec{u}_1')

2° angle (\vec{u}_1, \vec{u}_2')

pour 2 rotations vectorielles et 2 seulement qui associent
à 1 vecteur nommé de \vec{D} un vecteur nommé de \vec{D}'

$$r_1 : \vec{u}_1 \mapsto \vec{u}_1' \quad r_1 \text{ d'angle } \alpha_1$$

$$r_2 : \vec{u}_1 \mapsto \vec{u}_2' \quad r_2 \text{ d'angle } \alpha_2$$

$$\text{mes } \alpha_1 \equiv \theta_1 [2\pi]$$

$$\text{mes } \alpha_2 \equiv \theta_2 [2\pi] \quad \text{avec } \theta_2 = \theta_1 + \pi$$

$$\theta_2 - \theta_1 \equiv \pi [2\pi]$$

Si $\vec{D}' = \vec{D}$, alors $\alpha_1 = \omega$, $\alpha_2 = p$

alors $\text{angle}(\vec{D}, \vec{D}') = \{\omega, p\}$

En général, si $\vec{D}' \neq \vec{D}$, $\text{angle}(\vec{D}, \vec{D}') = \alpha_1 = \text{classe}$
d'équivalence définie par :

$$\alpha \mathcal{R} \beta \iff \alpha - \beta \in \{\omega, p\} \quad \leftarrow$$

Si $\alpha = \alpha_1$, alors $\beta = \alpha_1$ ou α_2

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \{\alpha_1, \alpha_1 + p\}$$

11.4

$$h: \underbrace{\mathcal{K}}_{\text{ens. des angles de vecteurs}} \longrightarrow \underbrace{\mathcal{K}'}_{\substack{\text{ens. des angles} \\ \alpha_1 \text{ de couples de} \\ \text{droites}}}$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \longmapsto & \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + p & \longmapsto & \alpha_1 = \alpha_2 \\ \omega & \longmapsto & \omega \\ \omega + p & \longmapsto & \omega \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \longmapsto & \alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 + p & \longmapsto & \alpha_1 = \alpha_2 \\ \omega & \longmapsto & \omega \\ \omega + p & \longmapsto & \omega \end{array}} \right\} \text{él. neutre de } (\mathcal{K}', +)$$

$$\text{Noyau } h = \{\omega, p\}$$

$$\begin{array}{lcl}
 h' : & \mathcal{K} & \longrightarrow \mathcal{K} \\
 & \alpha & \longmapsto \alpha + \alpha = \beta \\
 & \alpha + p & \longmapsto (\alpha + p) + (\alpha + p) = \beta
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{lcl} h' : & \mathcal{K} & \longrightarrow \mathcal{K} \end{array}} \right\}$$

h' est un endomorphisme de \mathcal{K} , surjectif.

$$\begin{array}{lcl}
 i : & \mathcal{K}' & \longrightarrow \mathcal{K} \\
 & \alpha & \longmapsto \alpha + \alpha = \beta \\
 & \overline{\alpha + p} = \alpha & \longmapsto (\alpha + p) + (\alpha + p) = \beta
 \end{array}$$

i = isomorphisme de \mathcal{K}' sur \mathcal{K}

Exercice 11 : un couple de droites vectorielles

\vec{B} bissectrice du couple (\vec{D}, \vec{D}') si et seulement si

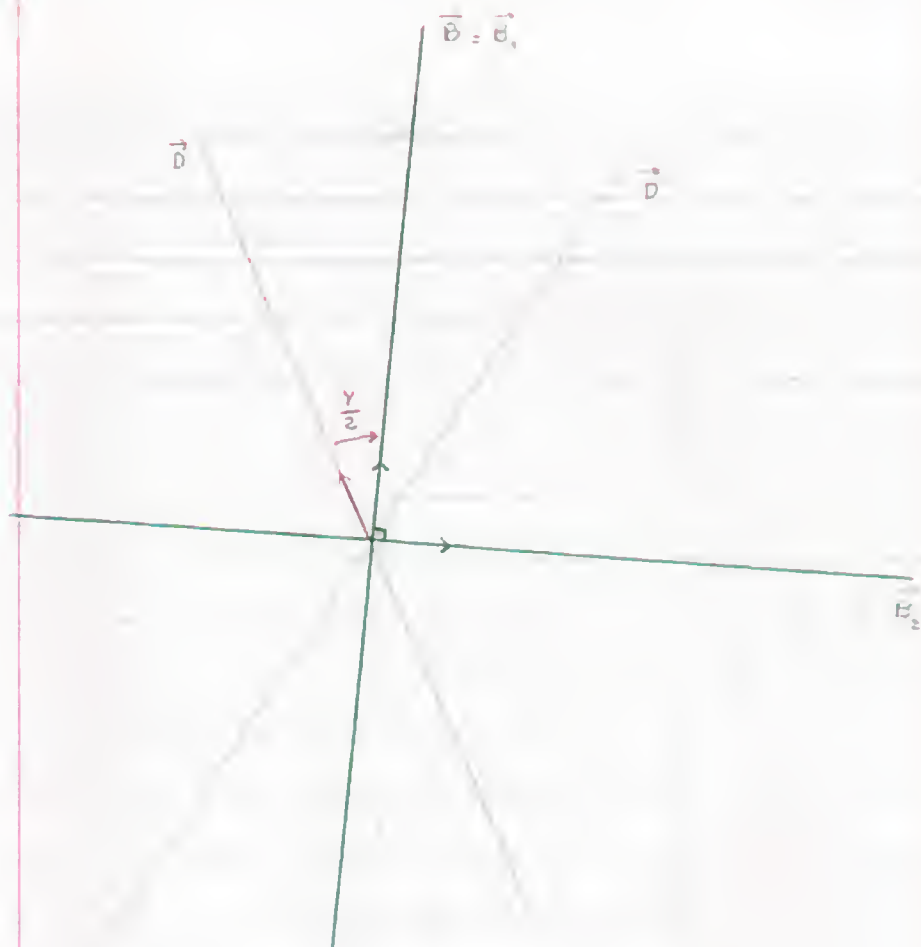
$$\text{angle}(\vec{D}, \vec{B}) = \text{angle}(\vec{B}, \vec{D}')$$

$$\begin{aligned}
 G \quad (\vec{D}, \vec{B}) + \underbrace{(\vec{B}, \vec{D}')}_{(\vec{D}, \vec{B})} &= (\vec{D}, \vec{D}') \\
 \alpha + \alpha &= \beta
 \end{aligned}$$

$$\alpha + \alpha = \beta$$

$$\text{mes } \alpha + \text{mes } \alpha = \text{mes } \beta$$

$$\theta + k\pi + \theta + k'\pi = \gamma + k''\pi \quad (k, k') \in \mathbb{Z}^2$$



Figure

Indications de lecture

chap 2 : C10 19 à 23
C10 116 à 119
C10 121 et 122

203 Géométrie

- 1 Espaces vectoriels sur \mathbb{R}
- 2 Applications linéaires
- 3 Structures
- 4 Automorphismes involutifs de E , esp. vect. sur \mathbb{R} .
- 5 Projections vectorielles p
- 6 Barycentres, espaces affines.
- 7 Applications affines
- 8 Homothéties - translations.
- 9 Projections
- 10 Symétries
- 11 Transformations orthogonales
- 12 Angles de couples de droites vectorielles